Prüfer: Prof. V. Diekert

Betreuer: Prof. V. Diekert

Beginn am: 1. Februar 1993

Beendet am: 14. August 1993

CR-Klassifikation: G.4,F.2.2,F4.1

Diplomarbeit Nr. 1025

Bereichstheoretische Eigenschaften komplexer Spuren

Dan Teodosiu

Institut für Informatik
Universität Stuttgart
Breitwiesenstraße 20–22
D–70565 Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit Ordnungseigenschaften partiell kommutativer Monoide, auch Spurenmonoide genannt. Diese mathematische Strukturen wurden von P. Cartier und D. Foata [CF69] eingeführt, um gewisse kombinatorische Ordnungsprobleme zu lösen.

Innerhalb der Informatik wurden sie als ein algebraisches Mittel zur natürlichen Modellierung der Semantik paralleler Prozesse als erstes durch die Pionierarbeit von A. Mazurkiewicz [Maz77] erkannt. Dabei entspricht die Multiplikation (Konkatenation) in diesen Monoiden der Hintereinanderausführung von Prozessen.

In der Zwischenzeit erfolgte eine systematische Untersuchung der Eigenschaften dieser Strukturen, die eine in sich zusammenhängende Theorie ergaben. Das Modell der endlichen Spuren wurde im Laufe der Zeit mehrmals erweitert, um verschiedene Aspekte paralleler Prozesse zu berücksichtigen.

Die Notwendigkeit der Modellierung nicht–terminierender Prozesse hat zum Beispiel zur Erforschung unendlicher (tansfiniter) Spuren geführt. Um die bei der Hintereinanderausführung unendlicher Prozesse auftauchenden Probleme zu beseitigen, wurde daraufhin in [Die91] das Monoid komplexer Spuren als Faktormonoid bezüglich einer geeigneten Kongruenzrelation definiert.

In dieser Arbeit wollen wir die Ordnungseigenschaften des Monoids komplexer Spuren bezüglich der Präfixrelation untersuchen. Die in [GP92b] eingeführte Präfixordnung, sowie die darin enthaltenen Ergebnisse bezüglich Vollständigkeit und Algebraizität werden vorgestellt.

Im einführenden Teil der Arbeit haben wir uns sehr nahe an die Darstellung der Spurentheorie aus den Monographien [Die90] und [DR93] gehalten und die für uns relevanten Ergebnisse übernommen.

Der Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich mit der Charakterisierung der Abhängigkeitsalphabete, für die das dazugehörige Monoid komplexer Spuren algebraisch ist ([GP92a]) und liefert einen Beweis für die in [Die93b] aufgestellte Vermutung:

Die Menge der komplexen Spuren über ein Abhängigkeitsalphabet ist genau dann algebraisch, wenn das Abhängigkeitsalphabet keine Kette von vier Knoten als induzierten Untergraphen enthält (Satz 2.34).

Eine solche Kette nennen wir ein Z, in Anlehnung an die graphische Darstellung des Buchstabens (siehe Abbildung 6).

Der Nachweis dieser Äquivalenz erfolgt in mehreren Schritten und benutzt folgendes Ergebnis, das unabhängig von dem restlichen Teil der Arbeit interessant ist, nämlich:

Sind ein Graph und dessen Komplement zusammenhängend, so enthält der Graph eine Kette von vier Knoten (ein Z) als induzierten Untergraphen (Satz 2.28).

Der von uns präsentierte Beweis dieser einfachen graphentheoretischen Asussage, der sowohl elementar als auch sehr anschaulich ist, konnte in der einschlägigen Literatur nicht ausfindig gemacht werden, weswegen wir uns darin bestätigt sehen die Originalität der Beweisführung zu beanspruchen.

1 Transfinite Spuren

Sei $\mathcal{U}$ ein Grothendieck Universum, das die leere Menge $\emptyset$ enthält.

Definition 1.1 *Ein* Abhängigkeitsalphabet *ist ein Paar* (Σ, D) *mit den Eigenschaften:*

- *das* Alphabet Σ *ist eine Menge aus* $\mathcal{U}$ *(d.h.* $\Sigma \in \mathcal{U}$*),*
- *die* Abhängigkeitsrelation D *ist eine reflexive und symmetrische Relation auf* Σ *(d.h.* $D \subseteq \Sigma \times \Sigma$*,* $1_\Sigma \subseteq D$ *und* $D = D^{-1}$*).*

Die Elemente von Σ *heißen* Buchstaben*, die Komplementrelation* $I := \Sigma \times \Sigma \setminus D$ *heißt* Unabhängigkeitsrelation*.*

Zwei Buchstaben $a, b \in \Sigma$ *heißen* abhängig *(bzw.* unabhängig*), falls* $(a, b) \in D$ *(bzw.* $(a, b) \in I$*). Die* Menge der von $A \subseteq \Sigma$ abhängigen *(bzw.* unabhängigen*)* Buchstaben *ist* $D(A) := \{b \in \Sigma | \exists a \in A : (a, b) \in D\}$ *(bzw.* $I(A) := \{b \in \Sigma | \forall a \in A : (a, b) \in I\}$*).*

Ein Abhängigkeitsalphabet (Σ, D) *heißt* endlich*, falls das Alphabet* Σ *endlich ist (d.h.* $|\Sigma| < \aleph_0$*).*

Ein Abhängigkeitsalphabet ist also ein ungerichteter Graph, der alle Knotenschleifen enthält. Die Knoten des Graphen entsprechen den Buchstaben, die ungerichteten Kanten den Abhängigkeiten des Abhängigkeitsalphabets (siehe Abbildung 1). Wir werden diese Analogie auch benutzen, um Abhängigkeitsalphabete, wenn möglich, im Text graphisch anzugeben. In diesem Sinne schreiben wir z.B. $a - b - c$ für das Abhängigkeitsalphabet $(\{a, b, c\}, \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\})$. Dabei zeichnen wir die Knotenschleifen aus šbersichtlichkeitsgründen nicht ein.

Definition 1.2 *Sei* (Σ, D) *ein Abhängigkeitsalphabet.*

Ein (Σ, D)–markierter Graph *ist ein Tripel* (V, E, λ) *mit den Eigenschaften:*

- *die* Knotenmenge V *ist eine Menge aus* $\mathcal{U}$ *(d.h.* $V \in \mathcal{U}$*),*
- *die* Kantenrelation E *ist eine wohlfundierte Relation auf* V *(d.h.* $E \subseteq V \times V$*, und jede nichtleere Untermenge von* V *hat mindestens ein minimales Element, in Zeichen* $\forall U \subseteq V \exists u \in U \forall v \in V : (v, u) \in E \implies v \notin U$*),*
- *die* Markierungsfunktion λ *ordnet jedem Knoten einen Buchstaben zu, so daß Kanten genau zwischen denjenigen Knoten existieren, die mit abhängigen Buchstaben markiert sind (d.h.* $\lambda : V \to \Sigma$ *und* $(\lambda \times \lambda)^{-1}(D) = 1_V \cup E \cup E^{-1}$*).*

Ein (Σ, D)*–markierter Graph heißt* endlich *(bzw.* abzählbar*), falls die Knotenmenge* V *endlich (bzw. abzählbar) ist (d.h.* $|V| < \aleph_0$ *(bzw.* $|V| \leq \aleph_0$*)).*

Zwei (Σ, D)*–markierte Graphen* (V, E, λ) *und* (V', E', λ') *heißen durch die Abbildung* $\xi : V \to V'$ isomorph*, in Zeichen* $(V, E, \lambda) \overset{\xi}{\sim} (V', E', \lambda')$*, falls:*

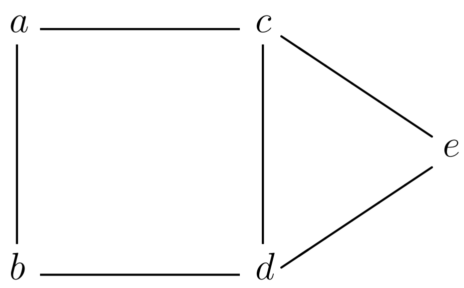

Abbildung 1: Ein Abhängigkeitsalphabet.

- *ξ die Knotenmenge erhält (d.h. ξ ist eine Bijektion),*
- *ξ die Kantenrelation erhält (d.h. $E = (\xi \times \xi)^{-1}(E')$),*
- *ξ die Markierungsfunktion erhält (d.h. $\lambda = \lambda'\xi$).*

Zwei (Σ, D)–markierte Graphen heißen isomorph*, falls es ein Isomorphismus zwischen ihnen gibt, in Zeichen*

$$(V, E, \lambda) \sim (V', E', \lambda') :\Longleftrightarrow \exists \xi : (V, E, \lambda) \overset{\xi}{\sim} (V', E', \lambda').$$

Die Isomorphieklasse *eines (Σ, D)–markierten Graphen (V, E, λ) ist die Menge, der zu ihm isomorphen (Σ, D)–markierten Graphen, in Zeichen*

$$[V, E, \lambda] := \{(V', E', \lambda') | (V', E', \lambda') \sim (V, E, \lambda)\}.$$

Definition 1.3 *Sei (Σ, D) ein Abhängigkeitsalphabet.*

Ein Abhängigkeitsgraph *(eine* Spur*) über (Σ, D) ist die Isomorphieklasse eines (Σ, D)–markierten Graphen. Ist der (Σ, D)–markierte Graph endlich (bzw. abzählbar), so heißt der Abhängigkeitsgraph (die Spur)* endlich *(bzw.* abzählbar*).*

Die Menge der endlichen Abhängigkeitsgraphen (endlichen Spuren) *über (Σ, D) wird mit $\mathbb{M}(\Sigma, D)$ oder einfach mit $\mathbb{M}$ bezeichnet und das* freie partiell kommutative Monoid *über das Abhängigkeitsalphabet (Σ, D) genannt.*

Die Menge der abzählbaren Abhängigkeitsgraphen (abzählbaren Spuren) *über (Σ, D) wird mit $\mathbb{G}(\Sigma, D)$ oder einfach mit $\mathbb{G}$ bezeichnet.*

Abhängigkeitsgraphen sind Isomorphieklassen gerichteter knotenmarkierter Graphen, die eine von dem Abhängigkeitsalphabetbestimmte Markierungsbedingung erfüllen. Da die Kantenrelation wohlfundiert ist, sind diese gerichteten Graphen azyklisch.

Im Falle endlicher Relationen ist die Azyklizität sogar äquivalent zur Wohlfundiertheit, also sind die endlichen Abhängigkeitsgraphen genau die Isomorpieklassen azyklischer knotenmarkierter Graphen, die die genannte Markierungseigenschaft erfüllen. In Abbildungen von Abhängigkeitsgraphen werden wir die Kanten die sich durch den

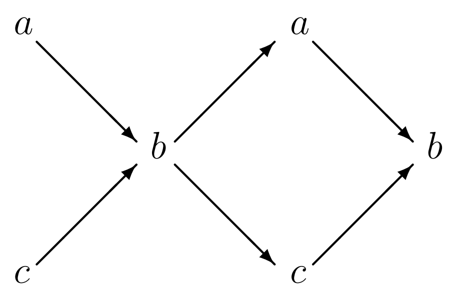

Abbildung 2: Ein Abhängigkeitsgraph (eine Spur) über das Abhängigkeitsalphabet $(\Sigma, D) = a - b - c$.

transitiven Abschluß erhalten lassen nicht einzeichnen, und schreiben weiterhin die Markierungsbuchstaben anstelle der Knoten (siehe Abbildung 2).

Im folgenden werden wir ausschließlich den für unsere Zwecke interessanten Fall *endlicher Abhängigkeitsalphabete* und *abzählbarer Abhängigkeitsgraphen* betrachten, jedoch sind die meisten der vorgestellten Ergebnisse mit einiger Vorsicht auch auf den Fall unendlicher Abhängigkeitsalphabete und überabzählbarer Abhängigkeitsgraphen übertragbar. Wir bezeichnen also im weiteren, falls nicht anders erwähnt, als Abhängigkeitsalphabete immer endliche Abhängigkeitsalphabete und als Abhängigkeitsgraphen immer abzählbare Abhängigkeitsgraphen.

Definition 1.4 *Sei $g = [V, E, \lambda]$ ein Abhängigkeitsgraph über (Σ, D).*

Das Alphabet *von g ist* $\mathrm{alph}(g) := \lambda(V)$.

Die Menge der von g abhängigen *(bzw.* unabhängigen*)* Buchstaben *ist* $D(g) := D(\mathrm{alph}(g))$ *(bzw. $I(g) := I(\mathrm{alph}(g))$).*

Die Einschränkung *von g auf die Knotenuntermenge $U \subseteq V$ ist*

$$g_{/U} := [U, E \cap (U \times U), \lambda \cap (U \times \Sigma)].$$

Die Einschränkung eines Abhängigkeitsgraphen auf eine beliebige Knotenuntermenge liefert, wie eine triviale šberprüfung der Definitionseigenschaften ergibt, erneut einen Abhängigkeitsgraphen über (Σ, D). Diese wichtige Eigenschaft von Abhängigkeitsgraphen werden wir im weiteren wiederholt benutzen, um aus gegebenen Abhängigkeitsgraphen neue Abhängigkeitsgraphen zu bauen, die gewünschte Eigenschaften besitzen.

Die Kantenrelation eines (Σ, D)–markierten Graphen ist azyklisch, also ist deren reflexiv-transitive Hülle antisymmetrisch und somit eine Ordnung.

Definition 1.5 *Sei $g = [V, E, \lambda]$ ein Abhängigkeitsgraph über (Σ, D).*

Die von g induzierte Halbordnung *ist die reflexiv-transitive Hülle der Kantenrelation E, d.h. $\preceq_g := [V, E^*]$.*

Die Vergangenheit *einer Knotenuntermenge* $U \subseteq V$*, in bezug auf die induzierte Halbordnung* $\preceq$*, ist die Knotenuntermenge* $\downarrow_g U := \{q \in V | \exists p \in U : q \preceq p\}$*. Für einelementige Knotenuntermengen schreiben wir einfach* $\downarrow_g p := \downarrow_g \{p\}$*.*

Eine Knotenuntermenge $U \subseteq V$ *heißt* nach unten abgeschlossen*, falls gilt* $U = \downarrow_g U$*. Der Abhängigkeitsgraph* g *heißt von der Knotenuntermenge* $U \subseteq V$ dominiert*, falls gilt* $V = \downarrow_g U$*.*

Da die reflexiv-transitive Hülle einer wohlfundierten Relation eine wohlfundierte Ordnung ist, folgt aus der obigen Definition, daß die von g induzierte Halbordnung $\preceq$ wohlfundiert sein muß.

Für jeden Buchstaben $a \in \Sigma$ ist deswegen die Einschränkung von $\preceq$ auf die total geordnete Untermenge der mit a markierten Knoten $V_a := \lambda^{-1}(a)$ eine wohlfundierte totale Ordnung und somit eine Wohlordnung (d.h. jede nichtleere Untermenge hat ein kleinstes Element).

Definition 1.6 *Sei* $g = [V, E, \lambda]$ *ein Abhängigkeitsgraph über* (Σ, D)*.*

Die partielle a-Länge *von* g *wird als die Ordinalzahl definiert, die der Wohlordnung* $|g|_a := [V_a, E^* \cap (V_a \times V_a)]$ *entspricht.*

Für jedes $a \in \Sigma$ kann dadurch die Menge der mit a-markierten Knoten V_a nach der Ordinalzahl $|g|_a = \{i | i < |g|_a\}$ indiziert werden. Somit ergibt sich für den Abhängigkeitsgraphen eine *Standarddarstellung* über die neue Knotenmenge $|g| := \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\} \times |g_a| = \{(a, i) | a \in \Sigma \text{ und } i < |g|_a\} \subseteq \Sigma \times \aleph_1$, wobei die Markierung trivialerweise aus den Knoten abgelesen, und die Kantenrelation durch Transportierung auf die neue Knotenmenge erhalten wird.

Diese Konstruktion liefert durch die Indizierung der Knoten zugleich auch einen Isomorphismus zwischen der ursprünglichen Darstellung des Abhängigkeitsgraphen $[V, E, \lambda]$ und dessen Standarddarstellung. Durch transfinite Induktion kann darüber hinaus die Eindeutigkeit dieses Isomorphismus nachgewiesen werden.

Zu einem gegebenen Abhängigkeitsgraphen g bezeichnen wir mit V_g, E_g, λ_g bzw. $\preceq_g$ die *kanonische Knotenmenge*, die *kanonische Kantenrelation*, die *kanonische Markierungsfunktion* bzw. die *kanonische Halbordnung* in der Standarddarstellung des Abhängigkeitsgraphen.

Wir werden im folgenden bevorzugt die Standarddarstellung der Abhängigkeitsgraphen benutzen, um die sonst nötigen Isomorphienachweise der unterliegenden Darstellungen als (Σ, D)–markierte Graphen zu umgehen.

1.1 Das Monoid abzählbarer Spuren $\mathbb{G}$

Definition 1.7 *Seien* (Σ, D) *ein Abhängigkeitsalphabet und* $g_1 = [V_1, E_1, \lambda_1]$*,* $g_2 = [V_2, E_2, \lambda_2]$ *zwei Abhängigkeitsgraphen mit* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$*.*

Die Konkatenation *der Abhängigkeitsgraphen* g_1 *und* g_2 *über* (Σ, D) *(siehe Abbildung 3) ist der Abhängigkeitsgraph* $g_1 \cdot g_2 = [V, E, \lambda]$*, wobei:*

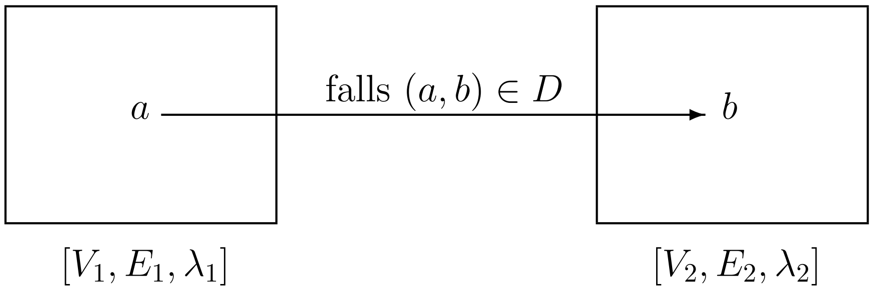

Abbildung 3: Konkatenation zweier Spuren.

- $V := V_1 \cup V_2$,
- $E := E_1 \cup E_2 \cup (\lambda_1 \times \lambda_2)^{-1}(D)$,
- $\lambda := \lambda_1 \cup \lambda_2$.

Der leere Abhängigkeitsgraph *(die* leere Spur*) ist* $1 := [\emptyset, \emptyset, \emptyset]$.

Wie man leicht nachprüfen kann, ist die Definition der Konkatenation unabhängig von den gewählten Repräsentanten. Die Konkatenation ist weiterhin eine assoziative Operation auf $\mathbb{G}$, bezüglich welcher der leere Abhängigkeitsgraph 1 neutrales Element ist. Darüber hinaus ist die Konkatenation auf $\mathbb{M}$ eine interne Operation, d.h. $\mathbb{M}$ ist gegenüber Konkatenation abgeschlossen. Es gilt also:

Satz 1.8 *$(\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ ist ein Monoid und $(\mathbb{M}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ ein Untermonoid von $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot, 1)$.*

Für jede Partition V_1, V_2 der Knotenmenge V_g (d.h. $V_1 \cup V_2 = V_g, V_1 \cap V_2 = \emptyset$) so daß es keine Kanten von V_2 nach V_1 in E_g gibt (d.h. $E_g \cap (V_2 \times V_1) = \emptyset$), gilt aus der Definition:

$$g = g_{/V_1} \cdot g_{/V_2}.$$

Die Bedingung in $V_1, V_2 \subseteq V_g$ ist genau dann erfüllt, wenn V_1 nach unten abgeschlossen und V_2 das Komplement von V_1 in V_g ist (d.h. $V_1 = \Downarrow_g V_1$, $V_2 = V_g \backslash V_1$) oder symmetrisch dazu, wenn V_2 nach oben abgeschlossen und V_1 das Komplement von V_2 in V_g ist (d.h. $V_2 = \Uparrow_g V_2$, $V_1 = V_g \setminus V_2$).
Die folgende Eigenschaft der Monoide $\mathbb{M}(\Sigma, D)$ und $\mathbb{G}(\Sigma, D)$ ist eine Verallgemeinerung des bekannten Lemmas von Levi für das freie Monoid Σ^*.

Satz 1.9 ([Die90, Die91]) *In dem Monoid $\mathbb{G}$ gilt das* Lemma von Levi*, d.h.:*
für alle $x, y, z, t \in \mathbb{G}$, wenn $x \cdot y = z \cdot t$, dann existieren $r, u, v, s \in \mathbb{G}$, so daß

$$x = r \cdot u\,,\; y = v \cdot s\,,\; z = r \cdot v\,,\; t = u \cdot s \;\textit{und}\; \mathrm{alph}(u) \times \mathrm{alph}(v) \subseteq I.$$

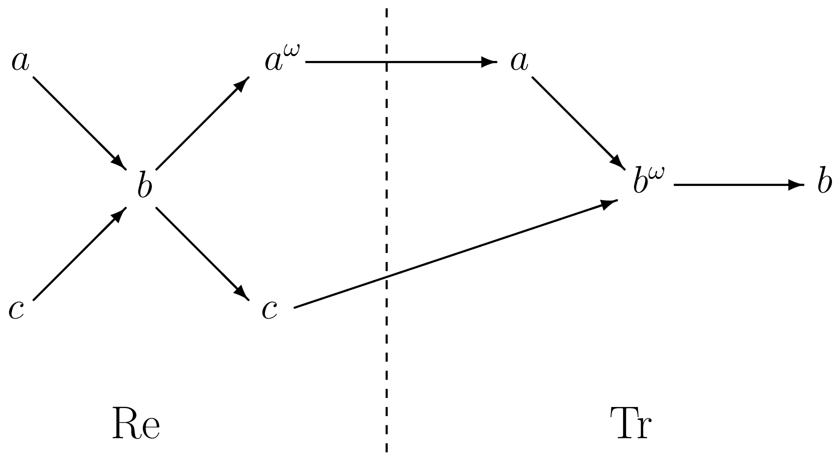

Abbildung 4: Reeller und transfiniter Teil einer Spur über das Abhängigkeitsalphabet $(\Sigma, D) = a - b - c$.

Der letzte Satz gilt selbstverständlich auch für das Monoid $\mathbb{M}$. Wir notieren gleichfalls folgende wichtige Eigenschaften des Monoids $\mathbb{G}$, die wiederum auch in $\mathbb{M}$ gelten:

Satz 1.10 ([GR91, Die91]) *In dem Monoid $\mathbb{G}$ gelten die Rechenregeln:*

1. Linkskürzbarkeit, *d.h. für alle $x, y, z \in \mathbb{G}$, wenn $x \cdot y = x \cdot z$, dann $y = z$;*

2. Gruppenfreiheit, *d.h. für alle $x, y \in \mathbb{G}$, wenn $x \cdot y = 1$, dann $x = y = 1$.*

Definition 1.11 ([Die91]) *Sei $g = [V, E, \lambda] \in \mathbb{G}(\Sigma, D)$ ein Abhängigkeitsgraph.*

Die Menge der Knoten endlicher *(bzw.* unendlicher*)* Vergangenheit *ist* $\mathrm{Re}(V) := \{p \in V | \downarrow_g p \textit{ endlich } \}$ *(bzw.* $\mathrm{Tr}(V) := \{p \in V | \downarrow_g p \textit{ unendlich } \}$*).*

Der reelle Teil *(bzw.* transfinite Teil*) von g (siehe Abbildung 4) ist die Einschränkung von g auf die Menge der Knoten mit endlicher (bzw. unendlicher) Vergangenheit, d.h.* $\mathrm{Re}(g) := g_{/\mathrm{Re}(V)}$ *(bzw.* $\mathrm{Tr}(g) := g_{/\mathrm{Tr}(V)}$*).*

Ein reeller Abhängigkeitsgraph *(eine* reelle Spur*) ist ein Abhängigkeitsgraph, dessen transfiniter Teil leer ist.*

Die Menge reeller Abhängigkeitsgraphen (reeller Spuren) *wird mit $\mathbb{R}(\Sigma, D)$ oder einfach mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.*

Da die Menge der Knoten mit endlicher Vergangenheit $\mathrm{Re}(V_g)$ nach unten abgeschlossen ist, und die Menge der Knoten mit unendlicher Vergangenheit $\mathrm{Im}(V_g)$ deren Komplement in V_g ist, gilt

$$g = g_{/\mathrm{Re}(V_g)} \cdot g_{/\mathrm{Tr}(V_g)} = \mathrm{Re}(g) \cdot \mathrm{Tr}(g).$$

Der reelle Teil einer Spur ist also genau das Präfix, das alle Knoten enthält, die endlich viele Vorgänger haben. Demnach sind die reellen Spuren genau diejenigen Spuren, deren Knoten in endlich vielen Schritten erreicht werden können, wobei wir annehmen, daß für jeden Knoten ein Schritt gebraucht wird. Beschreibt die Spur den Ablauf eines Prozesses, so entspricht der reelle Teil der Spur genau dem Teil, der in endlicher Zeit ablaufen kann, also beobachtet werden kann.

1.2 Das Monoid komplexer Spuren $\mathbb{C}$

Wir haben gesehen, daß die Menge der abzählbaren Spuren bezüglich der Konkatenation abgeschlossen ist und zusammen mit ihr ein Monoid bildet. Die Teilmenge der endlichen Spuren $\mathbb{M}(\Sigma, D)$ ist gegenüber der Konkatenation abgeschlossen und zusätzlich ein Teilmonoid von $\mathbb{G}(\Sigma, D)$. Dagegen ist die Teilmenge der reellen Spuren $\mathbb{R}(\Sigma, D)$ nicht abgeschlossen bezüglich der Konkatenation.

Sei z.B. $(\Sigma, D) = a - b - c$. Die Konkatenation der zwei reellen Spuren a^ω und b^ω ist nicht reell, denn a und b sind abhängig in (Σ, D), also hat jedes b in der Konkatenation unendlich viele Vorgänger. Andererseits ist die Konkatenation von a^ω und c^ω eine reelle Spur, denn a un c sind unabhängig in (Σ, D), also gilt $a^\omega \cdot c^\omega = (a \cdot c)^\omega$.

Versucht man die Konkatenation als interne Operation auf $\mathbb{R}(\Sigma, D)$ zu definieren und setzt man, was sehr natürlich erscheint,

$$\begin{aligned} a^\omega \cdot b^\omega = a^\omega \quad &, \text{ falls } \quad (a, b) \in D, \\ a^\omega \cdot c^\omega \neq a^\omega \quad &, \text{ falls } \quad (a, c) \notin D, \end{aligned}$$

so kann dadurch die Assoziativität nicht weiterhin gelten, denn wir haben dann die Kette:

$$a^\omega = a^\omega \cdot b^\omega = a^\omega \cdot (b^\omega \cdot c^\omega) = (a^\omega \cdot b^\omega) \cdot c^\omega = a^\omega \cdot c^\omega \neq a^\omega$$

.

Diese Schwierigkeiten können umgangen werden, wenn die Konkatenation der reellen Spuren in $\mathbb{G}(\Sigma, D)$ durchgeführt wird, und dabei von dem bei jeder Konkatenation erhaltenen transfiniten Teil nur die "notwendige" Information beibehalten wird.

Dazu betrachten wir zwei Spuren als "ununterscheidbar", falls sie bei der Konkatenation mit jeder Spur gleiche Realteile ergeben, also sozusagen auf die Konkatenation gleich reagieren. Insbesondere müssen "ununterscheidbare" Spuren gleiche Realteile besitzen (Konkatenation mit 1).

Wir wollen jetzt diesen Gedanken präzisieren und benutzen dazu folgende wohlbekannten Begriffe, die wir vollständigkeitshalber angeben:

Definition 1.12 *Eine Relation $\equiv$ auf der Menge M heißt* Äquivalenzrelation*, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist (d.h. $\equiv \subseteq M \times M$, so daß $1_M \subseteq \equiv$, $\equiv^{-1} \subseteq \equiv$ und $\equiv^2 \subseteq \equiv$).*

Eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf einem Monoid $(M, \circ, 1)$ heißt Kongruenzrelation*, falls sie mit der Monoidmultiplikation $\circ$ verträglich ist (d.h. wenn $x_1 \equiv y_1$ und $x_2 \equiv y_2$, dann $x_1 \circ x_2 \equiv y_1 \circ y_2$).*

Die von der Abbildung $\mathrm{Re} : \mathbb{G}(\Sigma, D) \to \mathbb{R}(\Sigma, D)$ definierte Kernäquivalenz $g \equiv_{\mathrm{Re}} h :\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(g) = \mathrm{Re}(h)$ ist im allgemeinen keine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot, 1)$. Dies kann man an dem Beispiel $(\Sigma, D) = a{-}b{-}c$, $g_1 := a^\omega$, $g_2 := a^\omega b$, $h := c$ sehen, denn $\mathrm{Re}(g_1) = \mathrm{Re}(g_2) = a^\omega$, aber $\mathrm{Re}(g_1 \cdot h) = \mathrm{Re}(a^\omega \cdot c) = a^\omega \cdot c \neq a^\omega = \mathrm{Re}(a^\omega b \cdot c) = \mathrm{Re}(g_2 \cdot h)$.

Die Menge der Kongruenzrelationen eines beliebigen Monoids ist bezüglich der mengentheoretischen Inklusion ein vollständiger Verband. Sei $\mathcal{K}_{\mathrm{Re}}$ die Menge der Kongruenzrelationen auf $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot)$, die kleiner sind als $\equiv_{\mathrm{Re}}$. Diese Menge muß eine größte obere Schranke $\equiv$ in dem Verband der Kongruenzrelationen besitzen. Von den Kongruenzrelationen aus $\mathcal{K}_{\mathrm{Re}}$ wollen wir sagen, daß sie *Realteile erhalten*.

Wir können also von der größten (gröbsten) Kongruenzrelation $\equiv$ sprechen, die kleiner (bzw feiner) ist als $\equiv_{\mathrm{Re}}$.

Unter Verwendung der Assoziativität des Monoids kann weiterhin gezeigt werden, daß $\equiv$ genau die transitive Hülle der mengentheoretischen Vereinigung aller Kongruenzrelationen aus $\mathcal{K}_{\mathrm{Re}}$ ist.

Bezüglich der so gebauten Kongruenzrelation $\equiv$ können wir das Monoid $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ faktorisieren.

Definition 1.13 ([Die91]) *Sei $\equiv$ die gröbste Kongruenzrelation auf $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot, 1)$, die Realteile erhält.*

Das Monoid komplexer Spuren $(\mathbb{C}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ *über das Abhängigkeitsalphabet* (Σ, D) *ist das Faktormonoid von* $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ *nach* $\equiv$*, d.h.*

$$(\mathbb{C}(\Sigma, D), \cdot, 1) := (\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot, 1)/\equiv .$$

Die Elemente von $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ *werden* komplexe Spuren *genannt.*

Die kanonische Projektion *von* $\mathbb{G}(\Sigma, D)$ *nach* $\mathbb{C}(\Sigma, D)$*, die jeder Spur ihre Äquivalenzklasse bezüglich* $\equiv$ *zuordnet, wird mit* χ *bezeichnet.*

Zwei Spuren $g, h \in \mathbb{G}(\Sigma, D)$ *heißen* ununterscheidbar*, falls sie äquivalent sind bezüglich* $\equiv$*, d.h.* $\chi(g) = \chi(h)$*. Sonst heißen sie* unterscheidbar.

Jede zwei Spuren, deren Realteile verschieden sind, sind unterscheidbar. Damit ist die Abbildung $\chi : \mathbb{R}(\Sigma, D) \to \mathbb{C}(\Sigma, D)$ eine Einbettung von $\mathbb{R}(\Sigma, D)$ in $\mathbb{C}(\Sigma, D)$, denn ungleiche reelle Spuren werden auf ungleiche komplexe Spuren (Kongruenzklassen) abgebildet.

Für Kongruenzrelation $\equiv$ existiert eine sehr handliche Charakterisierung, von der wir im folgenden oft Gebrauch machen werden. Zu diesem Zweck führen wir einige Bezeichnungen ein.

Definition 1.14 *Sei* $g = [V, E, \lambda]$ *eine Spur über das Abhängigkeitsalphabet* (Σ, D)*, und* $A \subseteq \Sigma$*.*

Das maximale von A unabhängige Präfix *von* g *ist* $\mu_A(g) := g_{/\mu_A(V)}$*, wobei* $\mu_A(V) := \{p \in V \mid {\downarrow} p \text{ endlich und } \mathrm{alph}({\Downarrow} p) \subseteq I(A)\}$*. Das dazu entsprechende* Suffix *wird mit* $\mathrm{suff_A(g)} := \mathrm{\mu_A(g)^{-1} g}$ *bezeichnet.*

Alternativ zur obigen Definition kann man auch $\mu_A(V) := \sqcup\{m \in \mathbb{M} | m \leq g$ und $\mathrm{alph}(m) \subseteq I(A)\} \in \mathbb{R}(\Sigma, D)$ setzen, wobei das letzte Supremum mit Sicherheit existiert, da einerseits die betrachtete Menge reeller Spuren durch g beschränkt ist, und andererseits die Menge aller reellen Spuren $\mathbb{R}(\Sigma, D)$ beschränkt (ja sogar kohärent) vollständig ist.

Direkt aus der Definition kann man leicht ersehen, daß

$$\begin{aligned} \mu_A(g) &= \mu_A(\mathrm{Re}(g)), \\ \mathrm{suff}_A(g) &= \mathrm{suff}_A(\mathrm{Re}(g)) \cdot \mathrm{Tr}(g). \end{aligned}$$

Der sehr wichtige nächste Satz beinhaltet die Rechenregel, nach der der Realteil der Konkatenation zweier Spuren in Abhängigkeit von den Realteilen der einzelnen Spuren berechnet werden kann.

Satz 1.15 ([Die93a, DR93]) *Seien $g, h \in \mathbb{G}(\Sigma, D)$ zwei Abhängigkeitsgraphen, und $A := \mathrm{alphinf}(g)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(g \cdot h) &= \mathrm{Re}(g) \cdot \mu_A(h) = \mathrm{Re}(g) \cdot \mu_A(\mathrm{Re}(h)), \\ \mathrm{Tr}(g \cdot h) &= \mathrm{Tr}(g) \cdot \mathrm{suff_A(h)} = \mathrm{Tr(g)} \cdot \mathrm{suff_A(Re(h))} \cdot \mathrm{Tr(h)}, \\ \mathrm{alphinf}(g \cdot h) &= \mathrm{alphinf}(g) \cup \mathrm{alphinf}(h) \cup \mathrm{alph}(\mathrm{suff_A(Re(h))}). \end{aligned}$$

Beweis: Da $\mathrm{alph}(\mathrm{Tr}(g)) \subseteq A$ kommutieren $\mathrm{Tr}(g)$ und $\mu_A(h)$, also folgt

$$\begin{aligned} g \cdot h &= \mathrm{Re}(g) \cdot \mathrm{Tr}(g) \cdot \mu_A(h) \cdot \mathrm{suff_A(h)} \\ &= \mathrm{Re}(g) \cdot \mu_A(h) \cdot \mathrm{Tr}(g) \cdot \mathrm{suff_A(h)}. \end{aligned}$$

Die Konkatenationsregel in $\mathbb{G}$ ergibt

$$\begin{aligned} \downarrow_{g \cdot h} q &= \downarrow_g q &&, \quad \text{falls } q \in V_g, \\ \downarrow_{g \cdot h} q &= \{p \in V_g | (\lambda_g(p), \lambda_h(q)) \in D\} \cup \downarrow_h q &&, \quad \text{falls } q \in V_h. \end{aligned}$$

Die Menge der Knoten endlicher Vergangenheit in $g \cdot h$ ist demzufolge die Vereinigung der Menge der Knoten endlicher Vergangenheit aus g mit der Menge der Knoten von $\mu_A(h)$, und somit folgt $\mathrm{Re}(g \cdot h) = \mathrm{Re}(g) \cdot \mu_A(h)$.

Die zweite Gleichung folgt durch die Linkskürzbarkeit von $\mathbb{G}$ aus der ersten, denn $\mathrm{Tr}(g \cdot h) = \mathrm{Re}(g \cdot h)^{-1}(g \cdot h) = \mathrm{Tr}(g) \cdot \mathrm{suff_A(h)}$.

Mit $\mathrm{alphinf}(g \cdot h) = \mathrm{alphinf}(\mathrm{Re}(g \cdot h)) \cup \mathrm{alph}(\mathrm{Tr}(g \cdot h))$ folgt somit aus den ersten beiden auch die dritte Gleichung. ■

Definition 1.16 *Sei (Σ, D) ein Abhängigkeitsalphabet.*

Der imaginäre Teil *der Spur $g \in \mathbb{G}(\Sigma, D)$ (siehe Abbildung 5) ist*

$$\mathrm{Im}(g) := D(\mathrm{alphinf}(g)),$$

wobei

$$\mathrm{alphinf}(g) := \{a \in \Sigma | \lambda_g^{-1}(a) \textit{ unendlich } \} \cup \mathrm{alph}(Tr(g)).$$

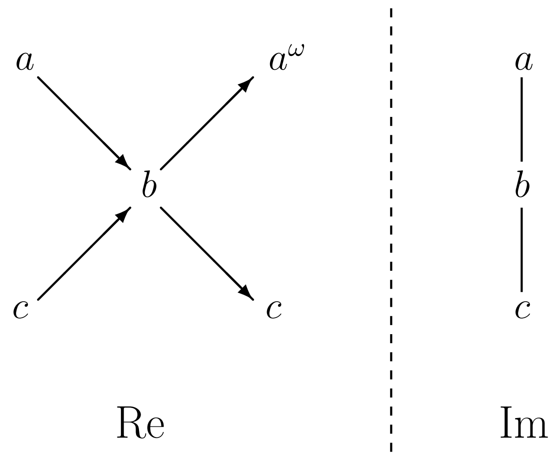

Abbildung 5: Reeller und imaginärer Teil der Spur aus Abbildung 4 über das Abhängigkeitsalphabet $(\Sigma, D) = a - b - c$.

Mit Hilfe der Begriffe des reellen und des imaginären Teils läßt sich die Kongruenzrelation $\equiv$, d.h. die Unterscheidbarkeit zweier Spuren, sehr leicht charakterisieren. Es gilt nämlich:

Satz 1.17 *Zwei Spuren sind ununterscheidbar genau dann, wenn sie gleiche reelle und imaginäre Teile besitzen, d.h. für alle $g, h \in \mathbb{G}(\Sigma, D)$ gilt*

$$g \equiv h \iff \mathrm{Re}(g) = \mathrm{Re}(h) \text{ und } \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(h).$$

Beweis: Wir bezeichnen mit $g \equiv' h :\iff \mathrm{Re}(g) = \mathrm{Re}(h)$ und $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(h)$.

Dann gilt für alle $g, h \in \mathbb{G}$, daß

$$\begin{aligned} g \equiv' h &\implies \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(h) \\ &\implies I(\mathrm{alphinf}(g)) = I(\mathrm{alphinf}(h)) \\ &\implies \mu_{\mathrm{alphinf}(g)} = \mu_{\mathrm{alphinf}(h)} \text{ und } \mathrm{suff}_{\mathrm{alphinf(g)}} = \mathrm{suff}_{\mathrm{alphinf(h)}} \end{aligned}$$

Mit 1.15 kann leicht nachgeprüft werden, daß $\equiv'$ eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{G}$ und somit kleiner (feiner) als die Kongruenzrelation $\equiv$ ist.

Seien nun $g, h \in \mathbb{G}$, so daß $g \equiv h$. Dann gilt aus der Definition von $\equiv$, daß $\mathrm{Re}(g) = \mathrm{Re}(h)$. Angenommen es gäbe ein $a \in \mathrm{Im}(g) \setminus \mathrm{Im}(h)$, so wäre wegen 1.15, $\mathrm{Re}(g \cdot a) = \mathrm{Re}(g) = \mathrm{Re}(h) \neq \mathrm{Re}(h) \cdot a = \mathrm{Re}(h \cdot a)$, also $\mathrm{Re}(g \cdot a) \neq \mathrm{Re}(h \cdot a)$, was offensichtlich falsch ist, da ja $\equiv$ eine Kongruenzrelation ist. ∎

Eine komplexe Spur $x \in \mathbb{C}(\Sigma, D)$ hat daher eine Darstellung als Paar $(\mathrm{Re}(g), \mathrm{Im}(g))$ mit $g \in \mathbb{G}$ oder auch als $(r, D(B)) \in \mathbb{R}(\Sigma, D) \times \mathcal{P}(\Sigma)$ mit $r = \mathrm{Re}(g)$ und $B = \mathrm{alphinf}(g) = \mathrm{alphinf}(r) \cup \mathrm{alph}(Tr(g))$. Wir übertragen die Bezeichnungen für den reellen und den imaginären Teil von $\mathbb{G}(\Sigma, D)$ auf $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ und schreiben $\mathrm{Re}(x) := \mathrm{Re}(g) = r$, $\mathrm{Im}(x) := \mathrm{Im}(g) = D(B)$.

Nicht jedes Paar $(r, D(B))$ mit $r \in \mathbb{R}(\Sigma, D)$ und $B \subseteq \Sigma$ stellt dabei eine komplexe Spur dar. Wir bezeichnen ein Paar $(A, B) \in \mathcal{P}(\Sigma) \times \mathcal{P}(\Sigma)$ als *konsistent*, falls es eine komplexe Spur $x \in \mathbb{C}(\Sigma, D)$ gibt, so daß $A = \mathrm{alphinf}(\mathrm{Re}(x))$ und $D(B) = \mathrm{Im}(x)$. Es gilt dann:

Satz 1.18 ([GP92b]) *Seien $A, B \subseteq \mathcal{P}(\Sigma)$. Es sind äquivalent:*

1. *Das Paar (A, B) ist konsistent.*
2. *Es existiert eine Folge von Buchstaben $(a_i | 1 \le i \le k)$, so daß für alle $1 \le i \le k$ gilt $a_i \in D(A \cup \{a_j | 1 \le j < i\})$ und $D(B) = A \cup \{a_i | 1 \le i \le k\}$.*
3. *Der ungerichtete Graph $(B, (D \cup A^2) \cap B^2)$ ist zusammenhängend, d.h. jeder Buchstabe aus B kann mit einem Buchstaben aus A durch ein Pfad innerhalb von B verbunden werden.*

Die Funktion $D : \mathbb{G}(\Sigma, D) \to \mathcal{P}(\Sigma)$ läßt sich zu $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ faktorisieren denn, für alle $g, h \in \mathbb{G}(\Sigma, D)$ gilt

$$D(g) = D(\mathrm{Re}(g)) \cup D(\mathrm{Tr}(g)) = D(\mathrm{Re}(g)) \cup \mathrm{Im}(g) = D(h),$$

und somit können wir die von einer komplexen Spur $x = (r, D(B))$ *abhängigen Buchstaben* $D(x) := D(\mathrm{Re}(x)) \cup \mathrm{Im}(x) = D(r) \cup D(B) = D(\mathrm{alph}(r) \cup B)$ definieren.

Die Konkatenation auf $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ wurde durch die Faktorisierung von $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ implizit definiert, kann aber mit Hilfe von 1.15 explizit angegeben werden.

Korollar 1.19 ([Die91]) *Seien $(r_1, D(B_1))$ und $(r_2, D(B_2))$ zwei komplexe Spuren über das Abhängigkeitsalphabet (Σ, D). Dann gilt*

$$(r_1, D(B_1)) \cdot (r_2, D(B_2)) = (r_1 \mu_{B_1}(r_2), D(B_1) \cup D(B_2) \cup D(\mathrm{suff_{B_1}(r_2)})).$$

Beispiel 1.20 Sei $(\Sigma, D) = a - b - c - d - e$ und $x_1 := a^\omega b, x_2 := c^\omega e^\omega d$. Dann sind

$$\begin{array}{ll} r_1 = \mathrm{Re}(x_1) = a^\omega & , \quad D(B_1) = \mathrm{Im}(x_1) = \{a, b, c\}, \\ r_2 = \mathrm{Re}(x_2) = c^\omega e^\omega & , \quad D(B_2) = \mathrm{Im}(x_2) = \{b, c, d, e\}, \end{array}$$

also

$$\mu_{B_1}(r_2) = e^\omega \quad , \quad \mathrm{suff_{B_1}(r_2) = c^\omega d}.$$

Die Konkatenation der zwei komlpexen Spuren, $x = x_1 \cdot x_2$, kann dann nach 1.19 berechnet werden:

$$\begin{array}{rcl} r = \mathrm{Re}(x) & = & r_1 \mu_{B_1}(r_2) = a^\omega e^\omega, \\ D(B) = \mathrm{Im}(x) & = & D(B_1) \cup D(B_2) \cup D(\mathrm{suff_{B_1}(r_2)}) = \{\mathrm{a, b, c, d, e}\}. \end{array}$$

Das Monoid $(\mathbb{C}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ ist nicht linkskürzbar, wie man am Beispiel $a^\omega \cdot a = a^\omega = a^\omega \cdot 1$ sehen kann. Es gilt jedoch:

Satz 1.21 *Das Monoid* $(\mathbb{C}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ *ist* linkskürzbar mit endlichen Spuren, *d.h. für alle* $m \in \mathbb{M}(\Sigma, D)$ *und* $x, y \in \mathbb{C}(\Sigma, D)$ *gilt*

$$m \cdot x = m \cdot y \implies x = y.$$

Beweis: Seien $m \in \mathbb{M}(\Sigma, D)$ und $x, y \in \mathbb{C}(\Sigma, D)$. Dann gilt

$$\mathrm{Re}(m) = m, \mathrm{Tr}(m) = 1, \mathrm{alphinf}(m) = \emptyset, \mathrm{Im}(m) = \emptyset$$

und damit

$$\mathrm{Re}(m \cdot x) = m \cdot \mathrm{Re}(x), \mathrm{Tr}(m \cdot x) = \mathrm{Tr}(x), \mathrm{alphinf}(m \cdot x) = \mathrm{alphinf}(x), \mathrm{Im}(m \cdot x) = \mathrm{Im}(x).$$

Mit 1.17 folgt wegen der Linkskürzbarkeit von $\mathbb{G}(\Sigma, D)$, daß

$$\begin{aligned}
m \cdot x = m \cdot y &\iff \mathrm{Re}(m \cdot x) = \mathrm{Re}(m \cdot y) \text{ und } \mathrm{Im}(m \cdot x) = \mathrm{Im}(m \cdot y) \\
&\iff m \cdot \mathrm{Re}(x) = m \cdot \mathrm{Re}(y) \text{ und } \mathrm{Im}(x) = \mathrm{Im}(y) \\
&\iff \mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(y) \text{ und } \mathrm{Im}(x) = \mathrm{Im}(y) \\
&\iff x = y.
\end{aligned}$$

■

2 Halbordnungen von Spuren

2.1 Halbordnungen

Wir wiederholen einige bekannte Definitionen und Sätze aus der Ordnungstheorie.

Definition 2.1 *Ein Paar* $(Z, \leq)$ *heißt* Halbordnung *(*partial order*), abgekürzt* PO, *falls* $\leq$ *eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf* Z *ist (d.h.* $\leq\, \subseteq Z \times Z$*, so daß* $1_Z \subseteq\, \leq$*,* $\leq \cap \leq^{-1} \subseteq 1_Z$ *und* $\leq^2 \subseteq\, \leq$*).*

Eine Abbildung zwischen zwei Halbordnungen $F : (Z, \leq) \to (Z', \leq')$ *heißt* monoton, *falls sie die Ordnung erhält (d.h.* $\forall x, y \in Z : x \leq y \implies F(x) \leq' F(y)$*).*

Ein Isomorphismus *(bzw. eine* Einbettung, Projektion*) zwischen zwei Halbordnungen ist eine monotone Bijektion (bzw. Injektion, Surjektion) zwischen den Halbordnungen.*

2.1.1 Vollständigkeit

Definition 2.2 *Sei* $(Z, \leq)$ *eine Halbordnung.*

Eine Untermenge $Y \subseteq Z$ *heißt* kohärent *(bzw.* gerichtet*), falls für jede* $x, y \in Y$ *ein* $z \in Z$ *(bzw.* $z \in Y$*) existiert, so daß* $x \leq z$ *und* $y \leq z$*.*

Ein Element $z \in Z$ *heißt* obere Schranke *(bzw.* untere Schranke*) der Menge* $Y \subseteq Z$*, falls* $y \leq z$ *(bzw.* $z \leq y$*) für alle* $y \in Y$*.*

Eine Untermenge $Y \subseteq Z$ *heißt* nach oben beschränkt *(bzw.* nach unten beschränkt*) oder auch konsistent, falls sie eine obere Schranke (bzw. untere Schranke) in Z besitzt. In diesem Fall schreiben wir* $Y\!\uparrow$ *(bzw.* $Y\!\downarrow$*).*

Eine Untermenge $Y \subseteq Z$ *heißt* nach oben abgeschlossen *(bzw.* nach unten abgeschlossen*), falls* $z \in Y$*, sobald* $z \geq y \in Y$ *(bzw.* $z \in Y$*, sobald* $z \leq y \in Y$*).*

Der Abschluß nach oben *(bzw.* Abschluß nach unten*) der Untermenge* $Y \subseteq Z$ *ist* $\uparrow\! Y := \{z \in Z | \exists y : z \geq y \in Y\}$ *(bzw.* $\downarrow\! Y := \{z \in Z | \exists y : z \leq y \in Y\}$*).*

Falls die Menge der oberen Schranken (bzw. unteren Schranken) von $Y \subseteq Z$ *ein kleinstes Element (bzw. größtes Element) besitzt, wird diese* kleinste obere Schranke *(bzw.* größte untere Schranke*) von* Y *in* Z*, mit* $\sqcup Y$ *(bzw.* $\sqcap Y$*) bezeichnet.*

Gerichtete (bzw. beschränkte) Untermengen einer Halbordnung sind direkt aus der Definition erkennbar kohärent.

Wir bemerken weiterhin, daß die leere Menge $\emptyset$ gerichtet (bzw. kohärent) ist, da sie die allquantifizierte Definitionseigenschaften trivialerweise erfüllt. Jedes Element der Halbordnung ist darüberhinaus obere Schranke der leeren Menge. Die leere Menge besitzt also eine kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke genau dann, wenn die Gesamtmenge ein *kleinstes Element* (bzw. *größtes Element*) besitzt, welches wir im folgenden mit $\perp$ (bzw. $\top$) bezeichnen.

Definition 2.3 *Eine Halbordnung heißt* vollständige Halbordnung *(*complete partial order*) abgekürzt* CPO*, falls jede gerichtete Untermenge eine kleinste obere Schranke besitzt.*

Analog dazu heißt eine Halbordnung kohärent vollständig *(bzw.* beschränkt vollständig*), falls jede kohärente (bzw. nach oben beschränkte) Untermenge eine kleinste obere Schranke besitzt.*

Eine Abbildung $F : (Z, \leq) \to (Z', \leq')$ *zwischen zwei vollständigen Halbordnungen (CPO's) heißt* stetig*, falls sie die kleinste obere Schranke gerichteter Untermengen erhält (d.h.* $\forall Y \subseteq Z \, gerichtet : \exists \sqcup' F(Y) = F(\sqcup Y)$*).*

Mit der obigen Bemerkung ist jede kohärent vollständige Halbordnung zugleich vollständig (CPO) und beschränkt vollständig.

Da die leere Menge gerichtet (bzw. kohärent, beschränkt) ist, muß eine vollständige (bzw. kohärent vollständige, beschränkt vollständige) Halbordnung ein kleinstes Element $\perp$ besitzen.

Weiterhin ist jede stetige Funktionen auch monoton, denn für $x, y \in Z$ und stetiges $F : (Z, \leq) \to (Z', \leq')$ gilt folgende Implikationskette:

$$x \leq y \iff y = \sqcup\{x, y\} \implies F(y) = \sqcup'\{F(x), F(y)\} \iff F(x) \leq' F(y).$$

2.1.2 Algebraizität

Definition 2.4 *Sei* $(Z, \leq)$ *eine Halbordnung.*

Ein Element $x \in Z$ *heißt* prim *(bzw.* kompakt*), falls für jede Untermenge (bzw. gerichtete Untermenge)* $Y \subseteq Z$*, die eine kleinste obere Schranke hat, folgende Implikation gilt:* $x \leq \sqcup Y \implies \exists y \in Y : x \leq y$*.*

Die Untermenge der primen *(bzw.* kompakten*)* Elemente unterhalb von x *ist* $P(x) := \{p \in Z | p \leq x \, und \, p \, prim\}$ *(bzw.* $K(x) := \{p \in Z | p \leq x \, und \, p \, kompakt\}$*).*

Die Halbordnung $(Z, \leq)$ *heißt* prim algebraisch *(bzw.* algebraisch*), falls für alle* $z \in Z$ *gilt:* $\exists \sqcup P(z) = z$ *(bzw.* $K(z)$ *gerichtet und* $\exists \sqcup K(z) = z$*).*

Ein Bereich *ist eine algebraische vollständige Halbordnung.*

Definition 2.5 *Sei* $(Z, \leq)$ *eine Halbordnung.*

Ein Ideal *in* $(Z, \leq)$ *ist eine nach unten abgeschlossene, gerichtete Untermenge von* Z*. Die Halbordnung* $(\mathcal{J}(Z), \subseteq)$ *aller Ideale aus* Z*, geordnet bezüglich der Mengeninklusion, wird als* Idealvervollständigung *der Halbordnung* $(Z, \leq)$ *bezeichnet.*

Wie aus der Definition des Ideals leicht ersichtlich, ist die Menge aller Ideale $\mathcal{J}(Z)$ der Halbordnung $(Z, \leq)$ bezüglich gerichteter Mengenvereinigungen abgeschlossen. Die Idealvervollständigung jeder Halbordnung ist demzufolge immer eine vollständige Halbordnung (CPO). Darüber hinaus liefert die injektive und monotone Abbildung $Z \to \mathcal{J}(Z), x \mapsto \{y \in Z | y \leq x\}$ eine bis auf Isomorphie minimale Einbettung der Halbordnung $(Z, \leq)$ in eine vollständige Halbordnung (CPO). Dieser Sachverhalt ist die Begründung für die Bezeichnung Idealvervollständigung.

2.2 Die Präfixordnung auf $\mathbb{G}$ und $\mathbb{R}$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Ordnungseigenschaften des Monoids abzählbarer Spuren $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ bezüglich der Präfixordnung. Insbesondere interessieren wir uns für die Ordnungseigenschaften der Präfixrelation auf die Menge der reellen Spuren $\mathbb{R}(\Sigma, D)$.

Definition 2.6 *Seien $f, g, h \in \mathbb{G}$, so daß $f \cdot g = h$. Dann heißt f* Präfix *von h und g* Suffix *von h. Die* Präfixrelation *auf $\mathbb{G}$ wird entsprechend definiert durch:*

$$f \leq h :\Longleftrightarrow \exists g \in \mathbb{G} : f \cdot g = h.$$

Zu jedem Präfix $f \in \mathbb{G}$ von $h \in \mathbb{G}$ existiert, wegen der Linkskürzbarkeit von $\mathbb{G}$, genau ein Suffix $g \in \mathbb{G}$ von h mit $f \cdot g = h$. Diesen von einem Präfix eindeutig bestimmten *Suffix* bezeichnen wir mit $f^{-1} \cdot h$.

Satz 2.7 $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \leq)$ *ist eine Halbordnung.*

Beweis: In jedem Monoid ist die Präfixrelation reflexiv und transitiv. Es bleibt also nur noch die Antisymmetrie nachzuweisen. Seien $f, g \in \mathbb{G}$, so daß $f \leq g$ und $g \leq f$. Dann existieren $x, y \in \mathbb{G}$, so daß $f \cdot y = g$ und $g \cdot y = f$, also $f \cdot x \cdot y = f$. Wegen der Linkskürzbarkeit von $\mathbb{G}$ folgt $x \cdot y = 1$ und wegen der Gruppenfreiheit von $\mathbb{G}$ folgt $x = y = 1$, also insgesamt $g = f \cdot x = f$. ∎

Satz 2.8 *Für alle $x, y \in \mathbb{G}$, so daß $\{x, y\}\uparrow$ existieren $u, v \in \mathbb{G}$, mit $x \cdot v = y \cdot u$ und* $\text{alph}(u) \times \text{alph}(v) \subseteq I$.

Beweis: Unter Verwendung des Lemmas von Levi folgern wir:

$$\begin{aligned} \{x, y\}\uparrow &\Longrightarrow \exists r, u, v \in \mathbb{G} : x = r \cdot u, y = r \cdot v, \text{alph}(u) \times \text{alph}(v) \subseteq I \\ &\Longrightarrow \exists u, v \in \mathbb{G} : x \cdot v = y \cdot u, \text{alph}(u) \times \text{alph}(v) \subseteq I. \end{aligned}$$

∎

Die Präfixrelation $\leq$ hat in $\mathbb{G}$ und $\mathbb{M}$ folgende einfache Charakterisierung.

Satz 2.9 ([GP92b]) *Eine Spur $f \in \mathbb{G}$ ist Präfix einer Spur $g \in \mathbb{G}$ genau dann, wenn f die Einschränkung von g auf eine nach unten abgeschlossene Knotenuntermenge ist, d.h. $f \leq g \Longleftrightarrow \exists U \subseteq V_g : f = g_{/\!\!\downarrow U}$.*

2.2.1 Die Vollständigkeit von $\mathbb{G}$ und $\mathbb{R}$

Satz 2.10 ([GR91, GP92b]) *Jede kohärente Menge von reellen Spuren ist abzählbar. Jede nach oben beschränkte Menge von Spuren ist abzählbar.*

Beweis: Sei G eine kohärente Menge von Spuren. Wir betrachten die Abbildung $\Lambda : G \to \Sigma \times \aleph_1, \Lambda(g) := (|g|_a)_{a\in\Sigma}$ und beweisen als erstes, daß sie injektiv ist.

Seien nämlich zwei Spuren $f, g \in G$, so daß $\Lambda(f) = \Lambda(g)$. Da G kohärent ist, gibt es ein $h \in \mathbb{G}$, so daß $f \leq h$ und $g \leq h$. Aus 2.9 folgt dann, daß f und g die Einschränkungen von h auf dieselbe Knotenmenge $\{(a, i)|a \in \Sigma$ und $i < |f|_a = |g|_a\}$ sind und somit $f = g$.

Sei jetzt G eine kohärente Menge von reellen Spuren. Dann ist aber $|g|_a \leq \omega$ für alle $a \in \Sigma$ und $g \in G$. Die Menge $\Lambda(G) \subseteq \{(i_a)_{a\in\Sigma}|\forall a \in \Sigma : i_a \leq \omega\}$ ist also abzählbar. Da Λ injektiv ist, muß auch G abzählbar sein.

Sei schließlich G eine nach oben beschränkte Menge von Spuren, und $h \in \mathbb{G}$ eine obere Schranke von G, dann ist aber $|g|_a \leq |h|_a$ für alle $a \in \Sigma$ und $g \in G$. Die Menge $\Lambda(G) \subseteq \{(i_a)_{a\in\Sigma}|\forall a \in \Sigma : i_a \leq |h|_a\}$ ist also abzählbar. Da Λ injektiv ist, folgt wiederum, daß auch G abzählbar sein muß. ■

Satz 2.11 ([GR91, GP92b]) *Eine Menge von Abhängigkeitsgraphen $G \subseteq \mathbb{G}$ besitzt eine kleinste obere Schranke $\sqcup G$ in $\mathbb{G}$, dann und nur dann, wenn sie kohärent und abzählbar ist. In diesem Fall ist $\sqcup G = \cup G$ die graphentheoretische Vereinigung der Abhängigkeitsgraphen in Standarddarstellung, d.h. $G = [V, E, \lambda]$, wobei $V = \bigcup_{g\in G} V_g$, $E = \bigcup_{g\in G} E_g$ und $\lambda = \bigcup_{g\in G} \lambda_g$.*

Beweis: Sei erst $G \subseteq \mathbb{G}(\Sigma, D)$ eine Menge von Abhängigkeitsgraphen, die eine kleinste obere Schranke besitzt. Dann ist sie insbesondere beschränkt und somit kohärent und nach 2.10 abzählbar.

Sei umgekehrt $G \subseteq \mathbb{G}(\Sigma, D)$ eine kohärente und abzählbare Menge von Abhängigkeitsgraphen. Wir zeigen, daß die Vereinigung der Abhängigkeitsgraphen $\cup G$ ein Abhängigkeitsgraph ist, und daß dieser Abhängigkeitsgraph die kleinste obere Schranke von G ist.

Die Gesamtmenge $\bigcup_{g\in G} V_g$ ist eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen und somit selbst abzählbar. Wegen der Kohärenz von G ist jeder der Abhängigkeitsgraphen $g \in G$ nach unten abgeschlossen innerhalb des Graphen $\cup G$ (d.h. wenn $(p, q) \in E$, und $q \in V_g$, dann $(p, q) \in E_g$, und $p \in V_g$). Die Wohlfundiertheit und die Markierungseigenschaft sind damit für den Graphen $\cup G$ leicht nachzuprüfen, also ist $\cup G$ ein Abhängigkeitsgraph.

Weiterhin ist jeder der Abhängigkeitsgraphen $g \in G$ nach 2.9 ein Präfix des Abhängigkeitsgraphen $\cup G$, welcher somit eine obere Schranke von G ist. Da jede sonstige obere Schranke h von G alle Abhängigkeitsgraphen $g \in G$ als nach unten abgeschlossene Untergraphen enthält, muß auch deren graphentheoretische Vereinigung $\cup G$ als nach unten abgeschlossener Untergraph in h enthalten und somit nach 2.9 ein Präfix von h sein.

Es folgt also zusammenfassend, daß die kleinste obere Schranke von G in $\mathbb{G}$ existiert und gleich $\cup G$ ist. ■

Es ist interessant zu bemerken, daß für jedes $a \in \Sigma$ die Menge $\mathbb{G}(a, (a, a))$ der abzählbaren Abhängigkeitsgraphen über $\{a\}$, d.h. die Menge abzählbarer Ordinalzahlen, eine gerichtete jedoch überabzählbare Untermenge von $\mathbb{G}(\Sigma, D)$ ist. Entsprechend besitzt sie auch keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{G}$, obwohl ihre graphentheoretische Vereinigung in der Tat ein Abhängigkeitsgraph ist, wenngleich ein überabzählbarer, nämlich $a^{\aleph_1}$.

Dieses Mißverhalten von $\mathbb{G}$ kann auch dadurch nicht verbessert werden, daß $\mathbb{G}$ um überabzählbare Abhängigkeitsgraphen erweitert wird, wenn weiterhin die Konkatenation von Abhängigkeitsgraphen eine interne Operation bleiben soll.

Es gibt also keine Menge von Abhängigkeitsgraphen, die bezüglich der Konkatenation ein Monoid und bezüglich der Präfixordnung eine vollständige Halbordnung (CPO) ist, außer natürlich der trivialen einelementigen Menge $\{1 = [\emptyset, \emptyset, \emptyset]\}$. Die letzte Behauptung ist durch transfinite Induktion leicht beweisbar.

Satz 2.12 ([GR91, GP92b]) *Die Halbordnung* $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \leq)$ *ist beschränkt vollständig. Die Halbordnung* $(\mathbb{R}(\Sigma, D), \leq)$ *ist kohärent vollständig (bzw. beschränkt vollständig, CPO).*

Beweis: Jede in $\mathbb{G}$ beschränkte Menge ist kohärent und nach 2.10 abzählbar, also folgt mit 2.11, daß sie eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{G}$ besitzt, und daraus die beschränkte Vollständigkeit von $\mathbb{G}$.

Sei nun $R \subseteq \mathbb{R}$ eine kohärente Menge reeller Spuren. Dann ist R auch in $\mathbb{G}$ kohärent und nach 2.10 abzählbar. Also besitzt R wegen 2.11 die kleinste obere Schranke $\cup R$ in $\mathbb{G}$. Aber $\cup R$ ist eine reelle Spur, da die Vergangenheit jedes Knotens in $\cup R$ vollständig in eine der Spuren aus R enthalten und somit endlich sein muß. Es folgt also, daß $\cup R$ die kleinste obere Schranke von R in $\mathbb{R}$ ist. ∎

2.2.2 Die Algebraizität von $\mathbb{G}$ und $\mathbb{R}$

Für $f \in \mathbb{G}$ und $P \subseteq V_f$ definieren wir f_P als die Einschränkung von f auf $\downarrow_f P$, d.h. $f_P := f_{/\Downarrow P}$. Für $p \in V_f$ setzen wir einfach $f_p := f_{/\{p\}}$. Wegen $f_P \leq f$ für alle $P \subseteq V_f$ ist die Menge $P_f := \{f_p | p \in V_f\}$ beschränkt, und wegen $\sqcup\{f_P, f_Q\} = f_{P \cup Q}$ für alle $P, Q \subseteq V_f$ ist die Menge $K_f := \{f_P | P \subseteq V_f$ und P endlich $\}$ gerichtet. Außerdem gelten $\sqcup K_f = \cup K_f = f$ und $\sqcup P_f = \cup P_f = f$.

Satz 2.13 ([GR91, GP92b]) *Eine Spur f ist genau dann kompakt (bzw. prim) in* $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \leq)$*, wenn sie die Vergangenheit einer endlichen (bzw. einelementigen) Knotenmenge ist (d.h. $f \in K_f$ (bzw. $f \in P_f$)). Eine reelle Spur f ist genau dann kompakt (bzw. prim) in* $(\mathbb{R}(\Sigma, D), \leq)$*, wenn sie endlich ist (bzw. endlich ist und einen einzigen maximalen Knoten bezüglich induzierter Ordnung besitzt).*

Beweis: Wir beweisen nur die Aussagen über die Kompaktheit von f.

Sei f eine kompakte Spur in $\mathbb{G}$. Die Menge K_f ist gerichtet und es gilt $\sqcup K_f = f$. Wegen der Kompaktheit von f muß also ein endliches $P \subseteq V_f$ existieren, derart daß $f \leq f_P$. Da $f_P \leq f$, folgt $f = f_P \in K_f$.

Umgekehrt sei nun $f \in \mathbb{G}$ mit $f \in K_f$, also $f = f_P$, wobei $P \subseteq V_f$ endlich ist. Sei weiterhin $G \subseteq \mathbb{G}$ eine gerichtete Menge, für die $h = \sqcup G$ existiert und $f \leq h$. Dann ist $P \subseteq V_f \subseteq V_h$ und $f = h_P$. Zu jedem $p \in P$ gibt es ein $g_p \in G$, so daß $p \in V_{g_p}$. Da G gerichtet und P endlich ist, existiert eine obere Schranke $g \in G$ zu allen g_p mit $p \in P$. Es folgt also, daß $P \subseteq V_g$, also $g_P = h_P$ und somit $f = h_P = g_P \leq g$. Insgesamt erhalten wir daraus, daß f kompakt ist.

Sei f jetzt eine kompakte Spur in $\mathbb{R}$. Dann ist $K_f \subseteq \mathbb{M}$ und somit, nach dem gleichen Beweis wie im Falle $f \in \mathbb{G}$, folgt $f \in K_f$ also $f \in \mathbb{M}$.

Umgekehrt, falls $f \in \mathbb{M}$ ist, existiert $P := V_f$, so daß $f = f_P$, und mit dem gleichen Beweis wie oben erhalten wir, daß f kompakt ist. ■

Lemma 2.14 *Für $f \in \mathbb{G}$ gelten $K(f) = K_f$ und $P(f) = P_f$.*

Beweis: Sei $f \in \mathbb{G}$. Wir beweisen nur, daß $K(f) = K_f$. Die andere Gleichung erhält man analog.

Sei nämlich $g \in K(f)$, also $g \leq f$ und g kompakt. Wegen 2.13 muß eine endliche Menge $P \subseteq V_g$ existieren, so daß $g = g_P$. Da $g \leq f$ folgt somit $g = g_P = f_P$, also $g \in K_f$. Umgekehrt ist jedes $g \in K_f$ kompakt, und es gilt trivialerweise $g \leq f$. Dann ist aber $g \in K(f)$. Wir erhalten insgesamt $K(f) = K_f$. ■

Satz 2.15 ([GR91, GP92b]) *Die Halbordnungen $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \leq)$ und $(\mathbb{R}(\Sigma, D), \leq)$ sind algebraisch (bzw. prim algebraisch).*

Beweis: Für beliebiges $f \in \mathbb{G}$ gilt wegen 2.14 die Gleichung $K(f) = K_f$, also hat $K(f)$ alle Eigenschaften von K_f. Insbesodere ist also $K(f)$ gerichtet, und es existiert $\sqcup K(f) = f$. Analog gilt $P(f) = P_f$ also existiert $\sqcup P(f) = f$. ■

2.2.3 $\mathbb{R}$ ist die Idealvervollständigung von $\mathbb{M}$

In der Definition 2.5 haben wir den Begriff des Ideals und den der Idealvervollständigung einer Halbordnung eingeführt.

Satz 2.16 ([Maz87, Kwi91]) *$\mathbb{R}(\Sigma, D)$ ist (bis auf Isomorphie) die Idealvervollständigung von $\mathbb{M}(\Sigma, D)$ bezüglich der Präfixordnung, d.h. $(\mathbb{R}(\Sigma, D), \leq) \sim (\mathcal{J}(\mathbb{M}(\Sigma, D)), \leq)$.*

Beweis: Wir zeigen, daß die Abbildung

$$K : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{M}), f \mapsto K(f) = K_f = \{h \in \mathbb{M} | h \leq f\}, \forall f \in \mathbb{R}$$

eine Einbettung von $(\mathbb{R}, \leq)$ in $(\mathcal{P}(\mathbb{M}), \subseteq)$ ist, und daß $K(\mathbb{R}) = \mathcal{J}(\mathbb{M})$. K ist demzufolge ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathcal{J}(\mathbb{M})$.

K ist injektiv, denn aus $K_f = K_g$ folgt $f = \sqcup K_f = \sqcup K_g = g$ für alle $f, g \in \mathbb{R}$.

K ist monoton, denn aus $f \leq g$ folgt $K(f) \subseteq K(g)$ für alle $f, g \in \mathbb{R}$.

Es bleibt zu zeigen, daß $K(\mathbb{R}) = \mathcal{J}(\mathbb{M})$. Wir weisen die doppelte Inklusion nach.

Sei $f \in \mathbb{R}$ eine reelle Spur. Die Menge $K(f)$ ist gerichtet und nach unten abgeschlossen, also ein Ideal, und deswegen gilt $K(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{J}(\mathbb{M})$.

Sei umgekehrt $J \in \mathcal{J}(\mathbb{M})$ ein Ideal, d.h. eine nach unten abgeschlossene gerichtete Untermenge von $\mathbb{M}$. Dann ist J kohärent, und somit existiert $f := \sqcup J \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, daß $K(f) = J$, und damit $\mathcal{J}(\mathbb{M}) \subseteq K(\mathbb{R})$. Sei erst $h \in J \subseteq \mathbb{M}$. Dann ist h kompakt, und wegen $h \leq f = \sqcup J$ muß $h \in K(f)$ sein. Es folgt also $J \subseteq K(f)$. Sei jetzt umgekehrt $h \in K(f)$. Dann ist h kompakt, und $h \leq f = \sqcup J$. Die Menge J ist gerichtet, also existiert ein $g \in J$ mit $h \leq g$. Da J nach unten abgeschlossen ist, folgt schließlich $h \in J$. ■

2.3 Die Präfixordnung auf $\mathbb{C}$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Ordnungseigenschaften des Monoids komplexer Spuren $(\mathbb{C}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ bezüglich der Präfixordnung.

Das Monoid $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ ist nicht linkskürzbar, weil z.B. $a^\omega \cdot a = a^\omega \cdot 1$. Die Ordnungseigenschaft der Präfixrelation kann also nicht auf dieselbe Weise wie im Falle des Monoids $(\mathbb{G}(\Sigma, D), \cdot)$ nachwiesen werden.

Wir bemerken zunächst folgende Eigenschaft der Konkatenation in $\mathbb{C}$:

$$x \leq y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Re}(x) \leq \mathrm{Re}(y) \text{ und } \mathrm{Im}(x).$$

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht, wie man sich an dem Beispiel $(\Sigma, D) = a - b - c, x = (a^\omega, \Sigma), y = (ca^\omega, \Sigma)$ klarmachen kann.

Der Grund dafür ist, daß $\mathrm{alph}(\mathrm{Re}(x)^{-1}\mathrm{Re}(y)) \cap \mathrm{Im}(x) \neq \emptyset$, daß also der Realteil mit Buchstaben "gewachsen" ist, die den Imaginärteil nicht hätten "passieren" können, und somit nicht von einer Rechtskonkatenation herrühren können.

Satz 2.17 ([GP92b]) *$(\mathbb{C}(\Sigma, D), \leq)$ ist eine Halbordnung.*

Beweis: Da in jedem Monoid die Präfixrelation reflexiv und transitiv ist, bleibt nur noch die Antisymmetrie zu beweisen.

Angenommen, es gäbe $x, y \in \mathbb{C}$ mit $x \leq y$ und $y \leq x$. Dann müßte nach der obigen Bemerkung $\mathrm{Re}(x) \leq \mathrm{Re}(y) \leq \mathrm{Re}(x)$ und $\mathrm{Im}(x) \subseteq \mathrm{Im}(y) \subseteq \mathrm{Im}(y)$ sein, also $\mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(y)$ und $\mathrm{Im}(x) = \mathrm{Im}(y)$. Damit gilt aber schon $x = y$. ■

Lemma 2.18 *Die Abbildungen $\chi : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ und $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sind monoton.*

Beweis: Die Abbildung χ ist ein surjektiver Homomorphismus. Für $f, g \in \mathbb{G}$ gilt deswegen

$$\begin{aligned} f \leq g \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists h \in \mathbb{G} : f \cdot h = g \\ &\Longrightarrow \quad \exists h \in \mathbb{G} : \chi(f \cdot h) = \chi(g) \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists h \in \mathbb{G} : \chi(f) \cdot \chi(h) = \chi(g) \\ &\Longleftrightarrow \quad \chi(f) \leq \chi(g) \end{aligned}$$

.

Für $x, y \in \mathbb{C}$ existieren $f, g \in \mathbb{G}$ mit $x = \chi(f), y = \chi(g)$ und $\mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(f), \mathrm{Re}(y) = \mathrm{Re}(g)$. Dann gilt

$$
\begin{array}{rcl}
x \leq y & \iff & \chi(f) \leq \chi(g) \\
 & \iff & \exists h \in \mathbb{G} : \chi(f) \cdot \chi(h) = \chi(g) \\
 & \iff & \exists h \in \mathbb{G} : \chi(f \cdot h) = \chi(g) \\
 & \implies & \exists h \in \mathbb{G} : \mathrm{Re}(f \cdot h) = \mathrm{Re}(g) \\
 & \implies & \exists \mu \in \mathbb{R} : \mathrm{Re}(f) \cdot \mu = \mathrm{Re}(g) \\
 & \iff & \mathrm{Re}(f) \leq \mathrm{Re}(g) \\
 & \iff & \mathrm{Re}(x) \leq \mathrm{Re}(y)
\end{array}
$$

. ■

2.3.1 Die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß $\mathbb{C}$ kohärent vollständig ist. Es ist leicht einzusehen, daß die Kohärenzeigenschaft invariant ist bezüglich monotoner Abbildungen. Betrachtet man die Kette von monotonen Surjektionen $\mathbb{G} \xrightarrow{\chi} \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Re}} \mathbb{R}$, müssen demzufolge kohärente Mengen abzählbarer Spuren auf kohärente Mengen komplexer Spuren, und diese wiederum auf kohärente Mengen reeller Spuren abgebildet werden, d.h.

$$
\begin{array}{rcl}
\exists\, G \text{ kohärent in } \mathbb{G} : C = \chi(G) & \implies & C \text{ kohärent in } \mathbb{C}, \\
\exists\, C \text{ kohärent in } \mathbb{C} : R = \mathrm{Re}(C) & \implies & R \text{ kohärent in } \mathbb{R}.
\end{array}
$$

Verwunderlich ist aber, daß die Umkehrung der ersten Implikation im allgemeinen nicht gilt, daß also eine kohärente Menge von komplexen Spuren nicht notwendigerweise eine kohärente Menge von Darstellungen als abzählbare Spuren besitzt (obwohl die Menge ihrer Realteile durchaus kohärent sein muß). Wäre nämlich das Gegenteil der Fall, so könnte man die Kohärenzvollständigkeit von $\mathbb{C}$ einfach aus derjenigen von $\mathbb{G}$ folgern.

Wir wollen den geschilderten Sachverhalt an dem folgenden typischen Beispiel verdeutlichen.

Beispiel 2.19 Wir betrachten das Abhängigkeitsalphabet

$$
\begin{tikzcd}
 & b_1 \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & c_1 \arrow[dd, dash] \\
(\Sigma, D) = a \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & b_2 \arrow[r, dash] & c_2
\end{tikzcd}
$$

und die zwei komplexen Spuren

$$
\begin{array}{rcccl}
x_1 & := & \chi(a^\omega \cdot b_1) & = & (a^\omega, \{a, b_1, b_2, c_1\}), \\
x_2 & := & \chi(a^\omega \cdot b_2) & = & (a^\omega, \{a, b_1, b_2, c_2\}).
\end{array}
$$

Wie man leicht sieht, ist $(a^\omega, \Sigma) = x_1 \cdot c_2 = x_2 \cdot c_1$ eine obere Schranke von $\{x_1, x_2\}$, also sind die zwei komplexen Spuren konsistent in $\mathbb{C}$. Wir beweisen jedoch, daß diese komplexen Spuren keine konsistenten Darstellungen als Abhängigkeitsgraphen in $\mathbb{G}$ besitzen. Angenommen das Gegenteil würde gelten, so gäbe es $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$, mit $x_1 = \chi(g_1), x_2 = \chi(g_2)$ und $\{g_1, g_2\}\uparrow$.

Dann ist

$$\begin{array}{lcl} c_2 \notin \mathrm{Im}(x_1) & \Longrightarrow & \mathrm{alph}(\mathrm{Tr}(g_1)) \subseteq I(c_2) = \{a, b_1\}, \\ c_1 \in \mathrm{Im}(x_1) & \Longrightarrow & \mathrm{alph}(\mathrm{Tr}(g_1)) \cap D(c_1) = \mathrm{alph}(\mathrm{Tr}(g_1)) \cap \{b_1, c_1, c_2\} \neq \emptyset. \end{array}$$

Also $b_1 \in \mathrm{alph}(\mathrm{Tr}(g_1)) \subseteq \{a, b_1\}$. Nun ist aber $\mathrm{Re}(g_1) = \mathrm{Re}(x_1) = a^\omega$, also erhalten wir $b_1 \in \mathrm{alph}(g_1) \subseteq \{a, b_1\}$ und analog $b_2 \in \mathrm{alph}(g_2) \subseteq \{a, b_2\}$. Wegen $\{g_1, g_2\}\uparrow$ existieren nach 2.8 $u_1, u_2 \in \mathbb{G}$, so daß $g_1 \cdot u_1 = g_2 \cdot u_2$ und $\mathrm{alph}(u_1) \times \mathrm{alph}(u_2) \subseteq I$. Da $b_1 \in \mathrm{alph}(g_1) \setminus \mathrm{alph}(g_2)$, folgt $b_1 \in \mathrm{alph}(u_2)$ und analog $b_2 \in \mathrm{alph}(u_1)$ also $(b_1, b_2) \in \mathrm{alph}(u_1) \times \mathrm{alph}(u_2)$ und deswegen zwingend $(b_1, b_2) \in I$, was offensichlich falsch ist.

Zwei konsistente komplexe Spuren besitzen demnach nicht unbedingt auch konsistente Darstellungen als abzählbare Spuren. Wir zeigen jedoch, daß das letztere der Fall sein muß, falls höchstens eine der zwei komplexen Spuren nicht reell ist.

Daraus erhalten wir danach, daß es für jede kohärente Menge komplexer Spuren, die höchstens eine nicht reelle Spur enthält, mit Sicherheit eine kohärente (ja sogar beschränkte) Menge von Darstellungen gibt.

Lemma 2.20 *Seien $g \in \mathbb{G}, r \in \mathbb{R}$ und $R \subseteq \mathbb{R}$. Dann gelten:*

1. *$\{r, \chi(g)\}\uparrow$ in $\mathbb{C} \Longrightarrow \{r, g\}\uparrow$ in $\mathbb{G}$;*
2. *$R \cup \{\chi(g)\}$ kohärent in $\mathbb{C} \Longrightarrow \exists \sqcup (R \cup \{g\}) = \sqcup\{\sqcup R, g\}$ in $\mathbb{G}$;*

Beweis:

1. $$\begin{array}{lcl} \{r, \chi(g)\}\uparrow \text{ in } \mathbb{C} & \Longrightarrow & \exists x \in \mathbb{C} : r \leq x, \chi(g) \leq x \\ & \Longrightarrow & \exists x \in \mathbb{C}\, \exists f \in \mathbb{G} : r \leq x \text{ und } x = \chi(g) \cdot \chi(f) = \chi(g \cdot f) \\ & \Longrightarrow & \exists h = g \cdot f \in \mathbb{G} : r \leq \chi(h) \text{ und } g \leq h \\ & \Longrightarrow & \exists h \in \mathbb{G} : r = \mathrm{Re}(r) \leq \mathrm{Re}(h) \leq h \text{ und } g \leq h \\ & \Longrightarrow & \{r, g\}\uparrow \text{ in } \mathbb{G} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{lcl} R \cup \{\chi(g)\} \text{ kohärent in } \mathbb{C} & \Longrightarrow & R \cup \{g\} \text{ kohärent in } \mathbb{G} \quad \text{(nach 1.)} \\ & \Longrightarrow & R \text{ kohärent in } \mathbb{G} \text{ und } R \cup \{g\} \text{ kohärent in } \mathbb{G} \\ & \Longrightarrow & R \text{ abzählbar und } R \cup \{g\} \text{ kohärent in } \mathbb{G} \\ & \Longrightarrow & R \cup \{g\} \text{ abzählbar und kohärent in } \mathbb{G} \\ & \Longrightarrow & \exists \sqcup (R \cup \{g\}) = \sqcup\{\sqcup R, g\} \text{ in } \mathbb{G} \end{array}$$

■

Lemma 2.21 *Sei $R \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{C}$. Ist die Menge $R \cup \{x\}$ kohärent in $\mathbb{C}$, so besitzt sie eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{C}$.*

Beweis: Sei $R \cup \{x\}$ kohärent in $\mathbb{C}$ und $g \in \mathbb{G}$ mit $x = \chi(g)$. Dann existiert in $\mathbb{G}$ nach 2.20 $s := \sqcup(R \cup \{g\}) = \sqcup\{r, g\}$, mit $r := \sqcup R$. Wir beweisen, daß $\exists \sqcup(R \cup \{\chi(g)\}) = \chi(s)$ in $\mathbb{C}$.

Es gilt nämlich elementweise $R \cup \{g\} \leq s$. Wegen der Monotonie von χ folgt also $R \cup \{\chi(g)\} \leq \chi(s)$. Außerdem ist jede obere Schranke von $R \cup \{\chi(g)\}$ in $\mathbb{C}$ größer als s, denn:

$$\begin{aligned}
R \cup \{\chi(g)\} \leq y \quad & \Longrightarrow \quad R \leq y \text{ und } \chi(g) \leq y \\
& \Longrightarrow \quad \exists f \in \mathbb{G} : y = \chi(f), R \leq y \text{ und } g \leq f \\
& \Longrightarrow \quad \exists f \in \mathbb{G} : y = \chi(f), R \leq \mathrm{Re}(y) = \mathrm{Re}(f) \leq f \text{ und } g \leq f \\
& \Longrightarrow \quad \exists f \in \mathbb{G} : y = \chi(f), R \leq f \text{ und } g \leq f \\
& \Longrightarrow \quad \exists f \in \mathbb{G} : y = \chi(f), R \cup \{g\} \leq f \\
& \Longrightarrow \quad \exists f \in \mathbb{G} : y = \chi(f), s \leq f \\
& \Longrightarrow \quad \exists f \in \mathbb{G} : y = \chi(f), \chi(s) \leq \chi(f) \\
& \Longrightarrow \quad \chi(s) \leq y.
\end{aligned}$$

Es folgt insgesamt, daß das gesuchte Supremum existiert und gleich $\chi(s)$ ist. ∎

Satz 2.22 ([**GP92b**]) *Die Halbordnung $(\mathbb{C}(\Sigma, D), \leq)$ ist kohärent vollständig. Für jede kohärente Menge C aus $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ gilt:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\sqcup X) &= \sqcup \mathrm{Re}(X) \\
\mathrm{Im}(\sqcup X) &= \mathrm{Im}(\sqcup \mathrm{Re}(X)) \cup \bigcup \mathrm{Im}(X)
\end{aligned}$$

Beweis: Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ kohärent und $R := \mathrm{Re}(X) \subseteq \mathbb{R}$. Für jedes $x \in X$ ist $R \cup \{x\}$ kohärent in $\mathbb{C}$ und somit existiert in $\mathbb{C}$ wegen 2.21

$$\sqcup(R \cup \{x\}) = \sqcup\{r, x\} = (r, \mathrm{Im}(r) \cup \mathrm{Im}(x))$$

mit $r := \sqcup R = \sqcup \mathrm{Re}(X) \geq \mathrm{Re}(x)$. Dann existiert aber auch

$$\begin{aligned}
\bigsqcup_{x \in X} \sqcup(R \cup \{x\}) &= \bigsqcup_{x \in X} (r, \mathrm{Im}(r) \cup \mathrm{Im}(x)) \\
&= (r, \mathrm{Im}(r) \bigcup_{x \in X} \mathrm{Im}(x)) \\
&= (r, \mathrm{Im}(r) \cup \bigcup \mathrm{Im}(X)].
\end{aligned}$$

Mit den bekannten Eigenschaften des Supremums folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\bigsqcup_{x \in X} \sqcup(R \cup \{x\}) &= \sqcup \bigcup_{x \in X} (R \cup \{x\}) \\
&= \sqcup(R \cup X) \\
&= \sqcup X.
\end{aligned}$$

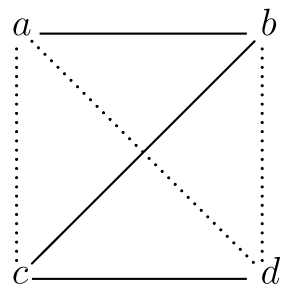

Abbildung 6: Die Abgängigkeiten in einem Z. (durchgezogene Linien entsprechen Kanten in D, gepunktete Linien entsprechen Kanten in I.).

Wir erhalten zusammenfassend $\exists \sqcup X = (\sqcup\mathrm{Re}(X), \mathrm{Im}(\sqcup\mathrm{Re}(X)) \cup \bigcup \mathrm{Im}(X))$. ■

Korollar 2.23 ([Die93b]) *Die kanonischen Abbildungen* $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *und* $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *bilden ein stetiges Einbettung/Projektion–Paar zwischen den vollständigen Halbordnungen* $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{C}$ *(d.h.* $\chi \circ \mathrm{Re} \leq 1_{\mathbb{C}}$*,* $\mathrm{Re} \circ \chi = 1_{\mathbb{R}}$ *und* χ, Re *sind stetig).*

Beweis: Die Eigenschaften als Einbettung/Projektion–Paar (bezüglich der Halbordnungen) folgen aus der Definition von $\mathbb{C}$. Die Stetigkeit ergibt sich aus 2.22. ■

2.3.2 Die bedingte Algebraizität von $\mathbb{C}$

Wir kommen nun zu den Hauptergebnissen der Arbeit.

Die Halbordnung der komplexen Spuren ist bezüglich der Präfixordnung zwar kohärent vollständig, im allgemeinen jedoch nicht algebraisch. Wir wollen uns deswegen in diesem Paragraphen mit der Charakterisierung derjenigen Abhängigkeitsalphabete (Σ, D) beschäftigen, für die die dazugehörige Halbordnung komplexer Spuren $(\mathbb{C}(\Sigma, D), \leq)$ algebraisch ist.

Da das Ergebnis dieser Untersuchung eine bemerkenswert simple Formulierung der Charakterisierungsbedingung gestattet, wollen wir diese vorabnehmen. Dazu betrachten wir das Abhängigkeitsalphabet als endlichen symmetrischen Graphen und führen folgende Definition allgemein für endliche und unendliche Graphen ein:

Definition 2.24 *Eine Folge von vier verschiedenen Knoten* $(a, b, c, d) \subseteq \Sigma$ *eines Graphen* (Σ, D) *wird als* Z *bezeichnet, falls der von ihnen induzierte Untergraph eine Kette ist (siehe Abbildung 6), d.h. mit* $I := \Sigma \times \Sigma \setminus D$ *ist*

$$|\{a, b, c, d\}| = 4,$$
$$\{(a, b), (b, c), (c, d)\} \subseteq D,$$
$$\{(a, c), (a, d), (b, d)\} \subseteq I.$$

Ein Graph, der kein Z besitzt heißt Z–frei.

Mit dieser Bezeichnung gilt für endliche Abhängigkeitsalphabete (Σ, D):

$$\boxed{\mathbb{C}(\Sigma, D) \textbf{ ist algebraisch } \iff (\Sigma, D) \textbf{ ist Z–frei}}$$

Wir beweisen die Äquivalenz in mehreren Schritten und fangen mit der leichteren Richtung an, nämlich

Satz 2.25 ([Die93b]) *Sei (Σ, D) ein endliches Abhängigkeitsalphabet. Dann gilt*

$$\mathbb{C}(\Sigma, D) \textit{ ist algebraisch } \implies (\Sigma, D) \textit{ ist Z–frei} .$$

Beweis: Sei $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ algebraisch und nehmen wir an, daß (Σ, D) nicht Z–frei ist. Dann gibt es vier verschiedene Buchstaben $a, b, c, d \in \Sigma$, so daß

$$\{(a, b), (b, c), (c, d)\} \subseteq D \text{ und } \{(a, c), (a, d), (b, d)\} \subseteq I.$$

Es gilt deshalb $a \in A := D(b) \setminus D(\{c, d\})$ und deswegen $D(b) \subseteq D(A) \cup D\{(c, d)\}$. Sei $\tilde{A}$ die Konkatenation der Buchstaben von $A \neq \emptyset$ in einer beliebigen Reihenfolge.

Wir betrachten die Spur $x := \tilde{A}^\omega b$ und zeigen, daß diese nicht gleich dem Supremum der unterhalb ihr liegenden kompakten Spuren ist. Eigentlich werden wir sogar noch mehr zeigen und zwar, daß dieses Supremum genau den reellen Teil der nicht-reellen Spur x ergibt. Dies bedeutet aber, daß $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ nicht algebraisch ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(x) &= \tilde{A}^\omega, \\ \mathrm{Im}(x) &= D(A \cup \{b\}). \end{aligned}$$

Da $c \in \mathrm{Im}(x) \setminus \mathrm{Im}(\mathrm{Re}(x)) \neq \emptyset$ ist $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Andererseits gilt

$$\begin{array}{rcll} x &=& \tilde{A}^\omega b & | \\ &\leq& \tilde{A}^\omega b \cdot d^\omega c & | \quad (b, d) \in I \\ &=& (\tilde{A}^\omega d^\omega, D(A \cup \{b, c, d\})) & | \quad D(b) \subseteq D(A) \cup D\{(c, d)\} \\ &=& (\tilde{A}^\omega d^\omega, D(A \cup \{c, d\})) & | \\ &=& \tilde{A}^\omega d^\omega c & | \quad A \subseteq I(\{c, d\}) \\ &=& \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}^n d^\omega c & | \end{array}$$

Sei nun $k \in K(x)$, d.h. k kompakt und $k \leq x = \tilde{A}^\omega b \leq \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}^n d^\omega c$. Daraus folgt, da k kompakt ist, daß ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $k \leq \tilde{A}^n d^\omega c$.

Dann gilt aber einerseits

$$\mathrm{alphinf}(\mathrm{Re}(k)) \subseteq \mathrm{alphinf}(\mathrm{Re}(\tilde{A}^n d^\omega c)) = \{d\}$$

und andererseits wegen $k \leq x$

$$\mathrm{alphinf}(\mathrm{Re}(k)) \subseteq \mathrm{alphinf}(\mathrm{Re}(\tilde{A}^\omega b)) = A.$$

Da $d \notin A$ folgt $\mathrm{alphinf}(\mathrm{Re}(k)) = \emptyset$, also $k \in \mathbb{M}$. Insgesamt gilt dann $K(x) \subseteq \mathbb{M}$, also $\sqcup K(x) = \mathrm{Re}(x) = \tilde{A}^\omega < \tilde{A}^\omega b = x$. ■

Um die Gegenrichtung zur Aussage 2.25 zu beweisen, brauchen wir eine gewisse graphentheoretische Vorarbeit. Dazu wollen wir uns etwas näher mit den Eigenschaften Z–freier Graphen beschäftigen.

Als erstes bemerken wir, daß die Z–Freiheit eine selbstduale Grapheigenschaft ist. Mit anderen Worten ist ein Graph genau dann Z–frei, wenn sein Komplement es auch ist, denn jedes Z in einem Graphen ist zugleich auch ein Z im Komplementgraphen. Wir brauchen für den Beweis der Äquivalenz folgendes Ergebnis über endliche Z–freie Graphen:

Jeder endliche Z–freie Graph ist entweder selber nicht zusammenhängend oder aber dessen Komplement ist nicht zusammenhängend, es sei denn der Graph besteht aus einem einzigen Knoten.

Da der Beweis dieser Aussage eine stärkere Formulierung zuläßt, die auch für unendliche Graphen gilt, wollen wir diese anschließend beweisen.

Definition 2.26 *Eine* alternierende Kette *in dem Graphen (Σ, D) ist eine unendliche Folge $(a_i|1 \leq i)$ verschiedener Knoten aus Σ derart, daß die Knoten deren Index gerade ist mit allen Knoten von streng kleinerem Index in dem Graphen (Σ, D) selbst verbunden sind und die Knoten deren Index ungerade ist mit allen Knoten von streng kleinerem Index in dem Komplement des Graphen (Σ, I) verbunden sind, d.h.*

$$\begin{aligned} (a_i, a_{2k}) \in D \quad &, \qquad \textit{für alle } 1 \leq i < 2k, \\ (a_i, a_{2k+1}) \in I \quad &, \qquad \textit{für alle } 1 \leq i < 2k+1. \end{aligned}$$

Wir sagen, daß die Kette mit dem Knotenpaar (a_1, a_2) anfängt.

Satz 2.27 *Sei (Σ, D) ein Z–freier, zusammenhängender Graph, dessen Komplement auch zusammenhängend ist.*

Zu jedem Paar verschiedener Knoten $a_1, a_2 \in \Sigma$, die in (Σ, D) miteinander verbunden sind, existiert eine alternierende Kette in (Σ, D), die mit a_1, a_2 anfängt.

Beweis: Seien (Σ, D) ein Z–freier, zusammenhängender Graph, dessen Komplement (Σ, I) zusammenhängend ist, und a_1, a_2 zwei verschiedene Knoten, die in (Σ, D) verbunden sind.

Wir bauen die Knotenfolge $(a_i|1 \leq i \leq n) \subseteq \Sigma$ induktiv nach $n \geq 2$ auf, so daß folgende Eigenschaft $\mathcal{E}(n)$ gilt:

$$\begin{aligned} (a_i, a_{2k}) \in D \quad &, \qquad \text{für alle } 1 \leq i < 2k \leq n, \\ (a_i, a_{2k+1}) \in I \quad &, \qquad \text{für alle } 1 \leq i < 2k+1 \leq n. \end{aligned}$$

Induktionsbasis $n = 2$:

Die gegebene Knotenfolge (a_1, a_2) erfüllt die Eigenschaft $\mathcal{E}(2)$.

Induktionsschritt $n \Longrightarrow n+1$:

Sei $n \geq 2$ und $\{a_i | 1 \leq i \leq n\} \subseteq \Sigma$ eine Knotenfolge mit der Eigenschaft $\mathcal{E}(n)$. Wir weisen die Existez eines Knotens $a_{n+1} \in \Sigma$ nach, derart, daß die Knotenfolge $\{a_i | 1 \leq i \leq n+1\}$ die Eigenschaft $\mathcal{E}(n+1)$ besitzt.

Die zu beweisende Aussage ist selbstdual, also können wir voraussetzen, daß n gerade ist, und demzufolge a_n mit allen kleineren Folgeknoten in (Σ, D), bzw. a_{n-1} mit allen kleineren Folgeknoten in (Σ, I), verbunden ist.

Speziell müssen also a_{n-1} und a_n in (Σ, D) miteinander verbunden sein. Da (Σ, I) zusammenhängend ist, gibt es eine Kette von Knoten durch die sie in (Σ, I) verbunden sind. Wir wählen eine Kette minimaler Länge. Dann enthält diese mit Sicherheit weniger als vier Knoten, denn sonst gäbe es bereits ein Z in dem Graphen (Σ, I). Andererseits muß diese Kette mehr als zwei Knoten enthalten, denn andernfalls müssten die Knoten a_{n-1} und a_n entweder gleich oder in (Σ, I) miteinander verbunden sein, was offensichtlich falsch ist, da ja die Knoten schon in (Σ, D) verbunden sind. Es bleibt also, daß die Kette genau drei Knoten enthalten muß.

Es existiert also ein Knoten a_{n+1}, der mit den Knoten a_{n+1} und a_n in (Σ, I) verbunden ist, d.h.

$$(a_{n-1}, a_{n+1}), (a_n, a_{n+1}) \in I.$$

Dieser Knoten kann nicht bereits in der Knotenfolge aufgetaucht sein, denn sonst könnte er nicht mit beiden Knoten a_{n-1} und a_n gleichzeitig verbunden sein.

Wir zeigen nun, daß der Knoten a_{n+1} auch mit allen anderen Knoten der ursprünglichen Folge in (Σ, I) verbunden sein muß.

Für $n = 2$ gibt es außer a_{n-1} und a_n keinen anderen Knoten in der Folge, also gilt $\mathcal{E}(3)$ bereits aus der Konstruktion.

Sei jetzt $n \geq 3$, und nehmen wir an, es gäbe ein $1 \leq i < n-1$, so daß a_i und a_{n+1} *nicht* in (Σ, I) und demzufolge in (Σ, D) verbunden sind, d.h.

$$(a_i, a_{n+1}) \in D.$$

Dann würden aber die Knoten $\{a_{n-1}, a_n, a_i, a_{n+1}\}$ ein Z in (Σ, D) bilden, denn durch die Induktionsvoraussetzung ist a_i mit a_{n-1} in (Σ, I) verbunden, und a_i mit a_n bzw. a_{n-1} mit a_n in (Σ, D) verbunden, d.h.

$$\begin{aligned} &(a_i, a_{n-1}) \in I \text{ und} \\ &(a_i, a_n), (a_{n-1}, a_n) \in D. \end{aligned}$$

Da aber (Σ, D) ein Z–freier Graph ist, müssen demzufolge alle bisherigen Folgenknoten $a_i, 1 \leq i < n+1$ mit dem neuen Knoten a_{n+1} in (Σ, I) verbunden sein, woraus die Aussage $\mathcal{E}(n+1)$ folgt. ∎

Korollar 2.28 *Sind ein endlicher mehrknotiger Graph und dessen Komplement zusammenhängend, so enthält der Graph ein Z.*

Das Korollar erlaubt eine interessante Charakterisierung endlicher Z-freier Graphen. Sei dazu die

Definition 2.29 *Die* Summe *der Graphen* (Σ_1, D_1) *und* (Σ_2, D_2) *mit* $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ *ist der Graph* (Σ, D) *mit*

$$\begin{aligned} \Sigma &:= \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \\ D &:= D_1 \cup D_2. \end{aligned}$$

Das Produkt *der Graphen* (Σ_1, D_1) *und* (Σ_2, D_2) *mit* $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ *ist der Graph* (Σ, D) *mit*

$$\begin{aligned} \Sigma &:= \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \\ D &:= D_1 \cup D_2 \cup (\Sigma_1 \times \Sigma_2) \cup (\Sigma_2 \times \Sigma_1). \end{aligned}$$

Ein Graph heißt Summen-Produkt–Graph, *falls er durch Produkt und Summe in endlich vielen Schritten aus einknotigen Graphen gebaut werden kann.*

Wie man leicht nachprüft, ist die Summe dual zum Produkt, d.h. das Komplement der Summe ist das Produkt der Komplemente. Ein Graph ist nicht zusammenhängend genau dann, wenn er die Summe zweier nichtleerer Graphen ist. Das Komplement eines Graphen ist nicht zusammenhängend genau dann, wenn der Graph das Produkt zweier nichtleerer Graphen ist.

Satz 2.30 *Jeder einknotige Graph ist Z–frei.*

Das Produkt (bzw. die Summe) zweier Graphen ist genau dann Z–frei, wenn beide Graphen Z–frei sind.

Beweis: Die erste Behauptung ist trivial.

Da der von einem Z induzierte Untergraph selbst sowie dessen Komplement zusammenhängend sind, muß jedes Z in der Summe (bzw. dem Produkt) zweier Graphen notwendigerweise in einem der beiden vollständig enthalten sein, also folgt die zweite Behauptung. ∎

Durch Induktion über die Knotenanzahl des Graphen erhalten wir

Satz 2.31 *Ein Graph ist genau dann Summen-Produkt–Graph wenn er endlich und Z–frei ist.*

Um die Umkehrung der Aussage 2.25 zu beweisen, müssen wir also zeigen, daß $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ algebraisch ist, falls (Σ, D) ein Summen-Produkt–Graph ist. Für den Beweis brauchen wir folgendes

Lemma 2.32 *Seien* $p \in \mathbb{C}$ *endlich und kompakt,* $x, y \in \mathbb{C}$*, so daß* $y = p \cdot x$*. Dann ist* y *kompakt genau dann, wenn* x *kompakt ist.*

Beweis: Sei erst y kompakt und $Z \subseteq \mathbb{C}$, so daß $x \leq \sqcup Z$. Dann ist $y = p \cdot x \leq p \cdot \sqcup Z = \sqcup(p \cdot Z)$, also existiert ein $z \in Z$, so daß $p \cdot x = y \leq p \cdot z$. Wegen der Linkskürzbarkeit mit endlichen Spuren in $\mathbb{C}$ folgt somit, daß $x \leq z$.

Sei jetzt x kompakt und $Z \subseteq \mathbb{C}$, so daß $p \cdot x = y \leq \sqcup Z$. Damit gilt aber $p \leq \sqcup Z$ und da p kompakt ist, muß ein $z \in Z$ mit $p \leq z$ existieren. Damit ist dann $\emptyset \neq Z \cap \uparrow p = p \cdot Z'$ mit $Z' := \{p^{-1}z | p \leq z\}$ und somit $p \cdot x = y \leq \sqcup Z = \sqcup(p \cdot Z') = p \cdot \sqcup Z'$. Erneut wegen der Linkskürzbarkeit mit endlichen Spuren in $\mathbb{C}$ folgt $x \leq \sqcup Z'$. Da x kompakt ist, existiert ein $z' \in Z'$ mit $x \leq z'$. Für $z := p \cdot z' \in p \cdot Z' \subseteq Z$ gilt somit $y = p \cdot x \leq p \cdot z' = z \in Z$. ∎

Satz 2.33 *Sei (Σ, D) ein (endliches) Abhängigkeitsalphabet. Dann gilt*

$$(\Sigma, D) \text{ Summen-Produkt–Graph } \implies \mathbb{C}(\Sigma, D) \text{ ist algebraisch .}$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion über den Aufbau des Summen-Produkt–Graphen.

Wenn das Abhängigkeitsalphabet einen einzigen Buchstaben enthält, d.h. $(\Sigma, D) = (\{a\}, \{(a, a)\})$, dann ist $\mathbb{C}(\Sigma, D) = \mathbb{R}(\Sigma, D) = \{a^n | n \leq \omega\}$, also ist $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ evident algebraisch.

Sei (Σ, D) die Summe der nichtleeren Summen-Produkt–Graphen (Σ_1, D_1) und (Σ_2, D_2), also

$$\begin{aligned} \Sigma &:= \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \\ D &:= D_1 \cup D_2. \end{aligned}$$

Dann sind die Buchstaben aus (Σ_1, D_1) unabhängig von denen aus (Σ_2, D_2). Deswegen kommutieren die Spuren aus $\mathbb{C}(\Sigma_1, D_1)$ mit denen aus $\mathbb{C}(\Sigma_2, D_2)$ innerhalb $\mathbb{C}(\Sigma, D)$. Das Monoid $(\mathbb{C}(\Sigma, D), \cdot, 1)$ ist somit das direkte Produkt der Monoide $(\mathbb{C}(\Sigma_1, D_1), \cdot, 1)$ und $(\mathbb{C}(\Sigma_2, D_2), \cdot, 1)$. Aus der Definition der Präfixrelation in einem Monoid folgt dann leicht, daß die Halbordnung $(\mathbb{C}(\Sigma, D), \leq)$ das Produkt der laut Induktionsvoraussetzung algebraischen Halbordnungen $(\mathbb{C}(\Sigma_1, D_1), \leq)$ und $(\mathbb{C}(\Sigma_2, D_2), \leq)$ ist. Ganz allgemein folgt dann aus der Ordnungstheorie, daß auch $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ algebraisch ist.

Sei nun (Σ, D) das Produkt der nichtleeren Summen-Produkt–Graphen (Σ_1, D_1) und (Σ_2, D_2), also

$$\begin{aligned} \Sigma &:= \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \\ D &:= D_1 \cup D_2 \cup (\Sigma_1 \times \Sigma_2) \cup (\Sigma_2 \times \Sigma_1). \end{aligned}$$

Die Halbordnungen $(\mathbb{C}(\Sigma_1, D_1), \leq)$ und $(\mathbb{C}(\Sigma_2, D_2), \leq)$ sind nach der Induktionsvoraussetzung algebraisch. Wir wollen zeigen, daß auch $(\mathbb{C}(\Sigma, D), \leq)$ algebraisch ist, daß also jede Spur $x \in \mathbb{C}(\Sigma, D)$ Supremum kompakter Spuren ist. Für $x \in \mathbb{R}(\Sigma, D)$ ist diese Bedingung evident erfüllt, da man ja endliche Spuren für das Supremum wählen kann.

Es bleibt der Fall $x \in \mathbb{C}(\Sigma, D) \setminus \mathbb{R}(\Sigma, D)$. Dann ist aber $A := \text{alphinf}(\text{Re}(x)) \neq \emptyset$ und $D(A) \neq \Sigma$. A ist demzufolge nichtleer und hat mit genau einem der Teilalphabete Σ_1 und Σ_2 einen nichtleeren Schnitt. O.B.d.A. nehmen wir an, daß $A \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$ und $A \cap \Sigma_2 = \emptyset$, also $I(A) \subseteq \Sigma_1$.

Dann enthält der reelle Teil $r := \text{Re}(x)$ nur endlich viele Knoten mit Markierungen aus Σ_2, d.h. $U := \lambda_r^{-1}(\Sigma_2)$ ist endlich. Es gibt ein endliches Präfix von r, das alle diese

Knoten aus U enthält, nämlich $p := r_U = r_{/\!\!U}$ Für das Sufix $s := p^{-1}r$ gilt demzufolge $\mathrm{alph}(s) \subseteq \Sigma_1$. Mit $y := (s, \mathrm{Im}(x))$ gilt dann $x = p \cdot y$.

Aus der Darstellung komplexer Spuren folgt, daß es mindestens ein $B \subseteq \Sigma$ gibt, so daß $A \subseteq B$ und $D(B) = \mathrm{Im}(x)$, also $x = (r, D(B)) = p \cdot y$ mit $y := (s, D(B))$.

Wir unterscheiden zwei Unterfälle.

1. Fall: Es gibt ein B, das die Bedingung erfüllt mit $B \subseteq \Sigma_1$. Es folgt also, daß $y = (s, D(B)) \in \mathbb{C}(\Sigma_1, D_1) \setminus \mathbb{R}(\Sigma_1, D_1)$.

Da $\mathbb{C}(\Sigma_1, D_1)$ laut Induktionsvoraussetzung algebraisch ist, existiert eine Menge von kompakten Spuren $Q \subseteq \mathbb{C}(\Sigma_1, D_1)$, so daß $y = \sqcup Q \in \mathbb{C}(\Sigma_1, D_1) \setminus \mathbb{R}(\Sigma_1, D_1)$. Jede kompakte Spur $q \in \mathbb{C}(\Sigma_1, D_1)$ ist zugleich auch in $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ kompakt, denn entweder ist q endlich, also die Vergangenheit endlich vieler Knoten oder aber nicht reell, d.h. $q \in \mathbb{C}(\Sigma_1, D_1) \setminus \mathbb{R}(\Sigma_1, D_1)$. Im letzten Fall enthielte aber jede Menge von Spuren $Z \in \mathbb{C}(\Sigma, D)$, für die $q \leq \sqcup Z$ und $\forall z \in Z : q \not\leq z$, ausschließlich Spuren aus $\mathbb{C}(\Sigma_1, D_1)$, weil der imaginäre Teil von q alle Buchstaben aus Σ_2 blockiert. Es folgt also, daß alle Spuren Q auch in $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ kompakt sind.

Damit gilt insgesamt $x = p \cdot y = p \cdot \sqcup Q = \sqcup(p \cdot Q) = \sqcup\{p \cdot q | q \in Q\}$. Mit 2.32 folgt schließlich, daß x ein Supremum kompakter Elemente ist.

2. Fall: Es gibt kein B, das die Bedingung erfüllt mit $B \subseteq \Sigma_1$. Da es aber auf jeden Fall ein B gibt, enthält dieses B Buchstaben aus Σ_2. Andererseits enthält B auch Buchstaben aus Σ_1, weil $A \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$ und $A \subseteq B$. Somit ist $\mathrm{Im}(x) = D(B) = \Sigma$, also y maximal. Wir zeigen, daß y kompakt ist und demzufolge nach 2.32 auch $x = p \cdot y$.

Für $y \leq \sqcup Z$ folgt $y = \sqcup Z$, also für alle $z \in Z$ gilt $z \leq y$. Wären nun alle $z \in Z$, so daß $z < y$, müßte $\mathrm{Im}(z) \neq \Sigma$ sein und deswegen $z \in \mathbb{C}(\Sigma_1, D_1)$ für alle $z \in Z$. Dann wäre aber $y = \sqcup Z \in \mathbb{C}(\Sigma_1, D_1)$, was nach der Voraussetzung nicht stimmt. ■

Aus 2.25, 2.31 und 2.33 erhalten wir insgesamt:

Satz 2.34 *Für ein endliches Abhängigkeitsalphabet* (Σ, D) *sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\mathbb{C}(\Sigma, D)$ *ist algebraisch.*
2. (Σ, D) *ist Z–frei.*
3. (Σ, D) *ist Summen-Produkt–Graph.*

Literatur

[CF69] P. Cartier and D. Foata. *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements.* Lecture Notes in Mathematics 85, Springer, 1969. 1

[Die90] V. Diekert. *Combinatorics on Traces.* Lecture Notes in Computer Science 454, Springer, 1990. 1, 6

[Die91] V. Diekert. On the concatenation of infinite traces. In Choffrut C. et al., editors, *Proceedings of the 8th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'91), Hamburg (Germany), 1991.* Lecture Notes in Computer Science 480, pages 105–117, Springer, 1991. To appear in *Theoretical Computer Science.* 1, 6, 7, 9, 12

[Die93a] V. Diekert. Möbius functions and confluent semi-commutations. *Theoretical Computer Science*, 108:25–43, 1993. 10

[Die93b] Volker Diekert. Complex and complex-like traces. In *Proceedings of the 18th Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'93), Gdansk (Poland), 1993.* Lecture Notes in Computer Science 711, pages 68–82, Springer, 1993. 1, 24, 25

[DR93] V. Diekert and G. Rozenberg, editors. *Tracebook (very preliminary draft).* 1993. 1, 10

[GP92a] Paul Gastin and Antoine Petit. Open problems on infinite traces. In I. M. Havel and V. Koubek, editors, *Proceedings of the 17th Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'92), Prague (Czechoslovakia), 1992.* Lecture Notes in Computer Science 629, pages 255–263, Springer, 1992. 1

[GP92b] Paul Gastin and Antoine Petit. Poset properties of complex traces. In I. M. Havel and V. Koubek, editors, *Proceedings of the 17th Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'92), Prague (Czechoslovakia), 1992.* Lecture Notes in Computer Science 629, pages 255–263, Springer, 1992. 1, 12, 16, 17, 18, 19, 20, 23

[GR91] P. Gastin and B. Rozoy. The poset of infinitary traces. Tech. Rep. LITP 91.07, Université Paris 6 (France), 1991. To appear in *Theoretical Computer Science.* 7, 16, 17, 18, 19

[Kwi91] M. Kwiatkowska. On the domain of traces and sequential composition. In S. Abramsky and T.S.E.. Maibaum, editors, *Proceedings 16th Coll. on Trees in Algebra and Programming (CAAP'91), Brighton (UK).* Lecture Notes in Computer Science 493, pages 42–56, Springer, 1991. 19

[Maz77] A. Mazurkiewicz. Concurrent program schemes and their interpretations. DAIMI Rep. PB 78, Aarhus University, Aarhus, 1977. 1

[Maz87] A. Mazurkiewicz. Trace theory. In W. Brauer et al., editors, *Petri Nets, Applications and Relationship to other Models of Concurrency*. Lecture Notes in Computer Science 255, pages 279–324, Springer, 1987. 19

Index